

数 学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は4ページである。
3. 問題は、 ～ の5題ある。
4. 解答用紙は、 ～ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら、まず、黑板等に掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が、自分に配付された数と合っているか確認し、もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に、解答用紙をミシン目に沿って落ちていて丁寧に別々に切り離し、学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから、解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は、必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし、裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = |x - 1| - 2$ について、次の各問いに答えよ。

(a) $y = f(x)$ のグラフを描け。

(b) $|f(x)| > 1$ となる x の範囲を求めよ。

(2) 実数 a は $\sqrt{2} < a$ を満たすとする。 $\sqrt{2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{a} < a$ を示せ。

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 2x^2 - 3 \int_{-1}^0 xf(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$$

2 関数 $y = \cos 2\theta - a \sin \theta + 2$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) について、次の各問いに答えよ。ただし、 a は正の定数とする。

(1) $t = \sin \theta$ とするとき、 y を t を用いて表せ。

(2) y の最大値 M と最小値 m を、それぞれ a を用いて表せ。また、そのときの t の値も求めよ。

3 次の 3—1 3—2 3—3 から1題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に、解答する問題の番号を記入すること。

3—1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1 = 2, b_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = a_n + 4b_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の各問いに答えよ。

- (1) $c_n = a_n - b_n$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $d_n = a_n + 3b_n$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3—2 一辺の長さが1の立方体 OABC-DEFG において、線分 BF を 2 : 1 に内分する点を P、線分 EF の中点を Q とする。また、線分 OF と平面 PQG の交点を R とする。次の各問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{OP} , \vec{OQ} を, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, $\vec{d} = \vec{OD}$ を用いて表せ。
- (2) $\vec{OR} = s\vec{OF}$ を満たす実数 s を求めよ。
- (3) $\triangle PQG$ の重心を S とするとき、線分 RS の長さを求めよ。

3—3

1枚のコイン投げを $2n$ 回行う。この $2n$ 回のコイン投げで、表が出る合計回数を X とする。ただし、コインの表と裏の出る確率は等しいとする。次の各問いに答えよ。

- (1) X の期待値と標準偏差をそれぞれ求めよ。
- (2) $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$ を求めよ。ただし、 $k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$ とする。
- (3) $P(X=k)$ を最大にする k の値を求めよ。
- (4) $n=200$ とする。試行回数が大きいくとき、 X の確率分布は正規分布で近似できることが知られており、試行回数400はこのような近似が成り立つのに十分大きくとみなせる。このことを利用して、 X の値が

$$190 \leq X \leq 210$$

となる確率の近似値を求めよ。ただし、標準正規分布に従う確率変数 Z に対する $P(Z > 1)$ の近似値としては0.159を用いよ。

4 O を原点とする座標平面において、 C_1 を曲線 $\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$ 、 C_2 を直線 $y = 2$ とする。点 P は第 1 象限にある C_1 上のある点とし、点 P における C_1 の接線を l 、この接線 l と C_2 との交点を Q とおく。次の各問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を $P(3 \cos \theta, \sin \theta)$ と表すとき、接線 l の方程式、および点 Q の座標を θ を用いて求めよ。
- (2) $\triangle POQ$ の面積を最小にする点 P の座標、および接線 l の方程式を求めよ。
- (3) (2) のとき、曲線 C_1 で囲まれた図形と $\triangle POQ$ との共通部分の面積を求めよ。

5 O を原点とする複素数平面において、4 点 O, A, B, C が、時計の針の回転と逆の向きに正方形をなすとする。複素数 z, w を表す点 $P(z), Q(w)$ が、点 A, B, C のいずれかに一致しているとき、次の各問いに答えよ。

- (1) z, w が条件 $0 < \arg\left(\frac{w}{z}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。このとき、点 P, Q は点 A, B, C のいずれに一致しうるか、条件を満たす P, Q の組をすべて求めよ。
- (2) z, w が (1) の条件に加え、さらに $w = z^2$ を満たすとする。このとき、(1) で求めた P, Q のそれぞれの組に対して、複素数 z の値を求め、対応する正方形 $OABC$ を複素数平面上に図示せよ。