前期日程試験

平成29年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせなさい。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

1 正二十面体Xを考える。

(1) Xのそれぞれの面が正三角形であることを用いて，Xの辺の数と頂点の数および1つの頂点に集まる辺の数を求めよ。

次にXの1辺の長さは2とし，Xは球Qの表面に内接しているとする。Qの中心をOとする。X上の1つの頂点Aとそのとなりにある頂点Bを1つとる。直線OA上にあるAと異なるXの頂点をC，直線OB上にあるBと異なるXの頂点をDとおく。

(2) 頂点A，B，C，Dは同一平面上にあり，四角形ABCDは長方形であることを証明せよ。

(3) 線分ADの長さを求めよ。

(4) Qの表面積を求めよ。

(5) Xの体積を求めよ。

(6) Xの1つの辺を共有する2つの面にOから下ろした垂線をそれぞれOH，OKとする。このときベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$の内積を求めよ。

◇M2(515—18)

2 関数$f(x)=xe^{-\sqrt{x}}$ $(x \geqq 0)$を考える。

(1) 増減と凹凸を調べて，関数$f(x)$のグラフの概形をかけ。

(2) xy平面上において曲線$y=f(x)$と直線$y=\dfrac{x}{e^2}$で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 xyz 空間において，原点Oを中心とする半径1の球面を S とする。a を正の実数とし，点A$(1, 0, 0)$と点P$(0, a, 0)$を通り z 軸に平行な平面を H とする。H と zx 平面のなす角を θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。H と S の交わりである円を C とおく。

(1) a を θ を用いて表せ。

(2) C の中心の座標を θ を用いて表せ。

(3) H 上の C で囲まれた部分を底面とし，原点Oを頂点とする円錐の体積を V とする。V の最大値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{4}$ $0 < a < 1$ である実数 a に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定義する。

(1) $a = \dfrac{1}{2}$ のとき，a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) を求めよ。

(2) すべての自然数 n について，$0 \leqq a_n \leqq 1$ であることを証明せよ。

(3) $0 < a_k < \dfrac{1}{4}$ をみたす自然数 k について，$a_{k+1} > 3a_k$ であることを証明せよ。

(4) $a_m \geqq \dfrac{3}{4}$ をみたす自然数 m が存在することを証明せよ。

(5) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ であるとき，$a_N = 0$ となる自然数 N が存在することを証明せよ。