平成31年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，４ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　a は定数で $a>1$ とし，点 $(a, 0)$ を通る傾き m の直線と円 $x^2+y^2=1$ とが異なる2点 A，B で交わる．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　m の値の範囲を求めよ．

問 2　問1で求めた範囲を m が動くとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ．

問題 2　n を正の整数とし，$f_n(x)=e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　第 2 次までの導関数 $f_n'(x)$ と $f_n''(x)$ を求めよ．

問 2　$n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\int_1^n \log x\,dx < \log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log n$ が成り立つことを示せ．

問 3　$n \geqq 1$ のとき，すべての正の実数 x に対し，$-\dfrac{1}{e} \leqq f_n'(x) < 0$ が成り立つことを示せ．

問題 3　α を，虚部が 0 でない複素数とする．複素数平面上で 3 点 0，α，α^2 を通る円を C とし，C の中心の複素数を β とする．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　β を α，$\overline{\alpha}$ を用いて表せ．

問 2　点 α^3 は C 上にないことを示せ．

問 3　$\dfrac{\alpha^3}{\beta}$ の実部が正となるとき，α の満たす条件を求めよ．

問 4　0 でないどんな実数 t に対しても点 $t\alpha^3$ が C 上にないとき，点 α 全体の集合を複素数平面上に図示せよ．

問題 4　2つの数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ は次の漸化式を満たしている.

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{4}q_n-\dfrac{1}{4} \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{3}{4}q_n+\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1　$p_n+q_n=p_1+q_1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ.

問 2　一般項 p_n を p_1, q_1 を用いて表せ.

問 3　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ が収束し, 和が1となるように, p_1 と q_1 の値を定めよ.

問 4　問2, 問3で求めた数列 $\{p_n\}$ について, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ の和を求めよ.

ただし, $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ であることは, 証明なしに用いてよい.