平成 31 年度　入学試験問題(前期日程)

数　　学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間　120 分

理工学部：数学物理学科(数学受験)・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子　　**問題……** $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$　　**ページ……1～2**

解答用紙……4 枚

下書用紙……1 枚

配　　点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の 0.75 倍とする。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 cを実数とする。x，yの多項式$x^2+y^2-5-c(xy-2)$を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) $x^2+y^2-5-c(xy-2)=0$がどのような実数cに対しても成り立つような実数x，yの組(x, y)をすべて求めよ。

(2) $c=2$のとき，$x^2+y^2-5-c(xy-2)$をx，yの1次式の積として表せ。

(3) $c=0$のとき，$x^2+y^2-5-c(xy-2)$はx，yの1次式の積として表されないことを示せ。すなわち，x，yの多項式として$x^2+y^2-5=(px+qy+r)(sx+ty+u)$をみたす実数$p$，$q$，$r$，$s$，$t$，$u$は存在しないことを示せ。

(4) $x^2+y^2-5-c(xy-2)$がx，yの1次式の積として表されるようなcの値をすべて求めよ。

2 a，bを$a>b>0$をみたす実数とする。xy平面上の楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$の焦点をF，F′とし，楕円上の点A$(0, b)$をとる。さらにOを原点とし，$\theta=\angle\mathrm{FAO}$ $(0\leqq\theta<\pi)$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) $\cos\theta$をa，bを用いて表せ。

(2) 3点A，F，F′を通る円Cの中心をO′とするとき，扇形O′AF（中心角$\angle\mathrm{AO'F}$がπ未満のほう）の面積Sをaとθを用いて表せ。

(3) 円$x^2+y^2=b^2$の面積とこの楕円の面積の比は$b:a$であることを定積分を用いて示せ。

(4) (3)の面積比が1：2のとき，(2)の面積Sをaの式で表せ。

3 実数 x に対して，$f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $f(x)=f(1-x)$ をみたす実数 x を求めよ。

(2) すべての実数 x に対して，$f(x)+f(1-x)$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2018} f\left(\frac{n}{2019}\right)=\frac{2^{\frac{1}{2019}}}{2^{\frac{1}{2019}}+\sqrt{2}}+\frac{2^{\frac{2}{2019}}}{2^{\frac{2}{2019}}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{2018}{2019}}}{2^{\frac{2018}{2019}}+\sqrt{2}}$ の値を求めよ。

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $x>1$ をみたす実数 x に対して，$x-\log x \geqq 1$ であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して，$2(\sqrt{n}-1) \geqq \log n$ であることを示せ。

(3) 2 以上の整数 n に対して，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{k}{n} \leqq \int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x\,dx \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{k+1}{n}$$

であることを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k\right)-\log n\right)$ を求めよ。