平成31年度・入学試験問題

数　　学（医）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験開始後，すべての解答用紙に氏名（カタカナ）及び受験番号を記入しなさい。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります。また，氏名（カタカナ）及び受験番号以外の文字，数字などは，絶対に記入してはいけません。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
5. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について，求める手順をわかりやすく説明すること。

◇M4(417—50)

1. 関数 $f(x)=\dfrac{2}{x}\log x\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$\log x$ は自然対数を表す。

(1) a を正の実数とする。曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$，$x=2a$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が最小となるときの a の値と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

2. 以下の条件を同時に満たすベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ について考える。

① $\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\vec{p}\cdot\vec{p}}$ は整数　② $\dfrac{(2\vec{p})\cdot(2\vec{q})}{\vec{q}\cdot\vec{q}}$ は整数　③ $\vec{p}\cdot\vec{q} \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ ④ $|\vec{p}| \neq 0,\ |\vec{q}| \neq 0$

ただし，$\vec{p}\cdot\vec{q}$ は 2 つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p}$，$\vec{q}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。θ の値をすべて求めよ。

(2) (1) の各 θ に対して，2 つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ の大きさの比をすべて求めよ。

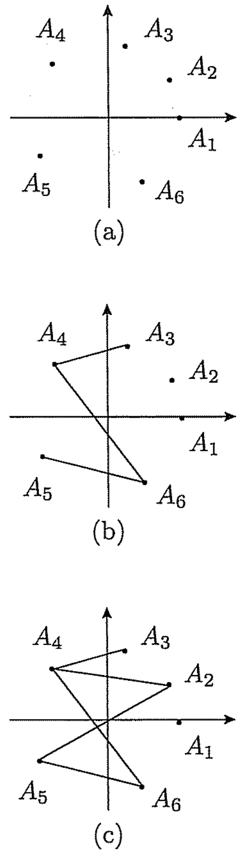
(3) xy 平面上に，原点を始点とするベクトル $\vec{p}=(1,0)$ および $\vec{q}=(q_1, q_2)$ $(q_2 \geqq 0)$ を考える。$\vec{p}$，$\vec{q}$ が上記の条件①から④を同時に満たすとき，ベクトル $\vec{q}$ を xy 平面上にすべて図示せよ。

3. サイコロを使って以下の①から③の操作を行うことで，図 (a) にある xy 平面上の点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のいくつかを線分で結んだ折れ線または 1 点からなる図形を作る。

① サイコロを投げて出た数字を投げた順番に並べる。ただし，一度出た数字がもう一度出たら，そこでサイコロを投げるのをやめるものとする。できた数字の列を $[i_1, i_2, \cdots, i_n]$ とする。

② $n = 2$ のとき，1 点 A_{i_1} からなる図形となる。$n \geqq 3$ のとき，$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_{n-1}}$ を線分で順次結ぶ。

③ 最後の数字 i_n が i_{n-1} または i_{n-2} と一致するとき，新たな点や線分を加えることなく作図を終了する。それ以外のときは，$A_{i_{n-1}}$ と A_{i_n} を線分で結び作図を終了する。



図

例えば，$[3, 4, 6, 5, 5]$ や $[3, 4, 6, 5, 6]$ の順で数字が出たときの図形は図 (b) となる。また $[3, 4, 6, 5, 2, 4]$ の順で数字が出たときの図形は図 (c) となる。なお，点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ の座標は

$$A_1 = (1, 0),\ A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),\ A_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$A_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ A_5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ A_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。次の問いに答えよ。

(1) 作図終了後，図形が点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のうち 3 点を頂点とする三角形となる確率を求めよ。

(2) 作図終了後，図形が点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のうち 3 点を頂点とする直角三角形となる確率を求めよ。

(3) 作図終了後，図形の中に $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のいずれかを 3 頂点とする直角三角形が含まれる確率を求めよ。

4. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & a_n > 0 \text{ のとき} \\ n & a_n \leqq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) $a_n = 10000$ となる最小の n の値を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す。$S_n \geqq 10000$ となる最小の n の値を求めよ。