

平成31年度入学試験問題(前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (前 期)

[1] $\triangle ABC$ は、3 辺の長さ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ が整数で $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ を満たすとする。

- (1) $ab = 21$ を満たすような (a, b, c) をすべて求めよ。
- (2) $a + b + c = \frac{bc}{2}$ を満たすような (a, b, c) をすべて求めよ。

[2]

- (1) $t \geq 0$ のとき、不等式 $\frac{t^2}{2} < e^t$ を示せ。
- (2) 実数 c に対して、直線 $y = c$ と関数 $y = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ のグラフとの共有点の個数を求めよ。

[3] さいころを 4 回投げて出た目をそれぞれ Z_1, Z_1, Z_2, Z_2 とし、 $X_i (i = 1, 2)$ を次のように定義する。

$$X_i = \begin{cases} Z_i & (Z_i \geq 4 \text{ のとき}) \\ Z_i + Z_i' & (Z_i \leq 3, Z_i + Z_i' \leq 6 \text{ のとき}) \\ 6 & (Z_i \leq 3, Z_i + Z_i' > 6 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- (1) X_1 がとりうる値とそれぞれの確率を求めよ。
- (2) $Z_1 = 1$ のとき、 $X_1 + X_2 = 6$ である条件付き確率を求めよ。
- (3) $X_1 + X_2 = 6$ のとき、 $Z_1 = 1$ である条件付き確率を求めよ。

[4]

- (1) A, O を $AO = 1$ を満たす平面の定点とし、 C を O を中心とする半径 $a (a < 1)$ の円とする。点 P が、
条件：線分 AP と円 C との共有点が P のみである
を満たすように C 上を動くとき、線分 AP の長さの最大値と最小値を求めよ。
- (2) A, O を $AO = 1$ を満たす空間の定点とし、 S を O を中心とする半径 $a (a < 1)$ の球面とする。 S 上の点 P で、
条件：線分 AP と球面 S との共有点が P のみである
を満たすものを考えて、すべての P に対する線分 AP の和集合を K とする。 K の体積 V を求めよ。

[5] i を虚数単位とし、複素数 z に対し、 \bar{z} , $\arg z$ をそれぞれ z の複素共役、偏角とする。

- (1) $|w_1| = |w_2| = 1$ である複素数 w_1, w_2 に対し $\theta = \arg \frac{w_1}{w_2}$ とするとき、 $|w_1 - w_2| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$ を示せ。
- (2) $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\gamma = \bar{\beta}$ とする。複素数 z が $|z| = 1$ を満たすように動くとき、 $|z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \gamma|$ の最大値と最小値を求めよ。