数　学

(医　学　部)

― 2月2日 ―

解答はすべて解答用紙に記入して提出しなさい。

次の空欄を埋めなさい.

解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい.

1 (1) 店に立ち寄るたびに $\frac{1}{7}$ の確率で傘を忘れる人が，店 A，店 B，店 A(店 A には二回立ち寄っている) の順に立ち寄ったあと，傘を忘れたことに気づいた．店 A に傘を忘れた確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．ただし，最初に傘は 1 本だけ持っていたとする．

(2) 曲線 $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$ の $0 \leqq x \leqq 2$ の部分の長さは $\boxed{\text{イ}}$ である.

(3) 1800 の正の約数の逆数の総和は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

(4) a，b を 1 以外の正の定数とする．2 次方程式

$$x^2-x\log ab+(\log a^2)(\log b)=0$$

が重解をもつ．このとき，$\log_a b=\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ であり，$\log_a b$ と $\log_b a$ を解にもつ 2 次方程式は，$x^2+\boxed{\text{カ}}\,x+\boxed{\text{キ}}=0$ である．ただし，$\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$ とする.

2 n を 2 以上の自然数とする．2 辺の長さが 3 と 1 の長方形を底面とし，高さが一定の積み木が $3n$ 本ある．これらの積み木は最初，図(a)のように各階ごと 3 本ずつ，縦横に組み上げてあり，これを初期状態という．初期状態から，次の条件(I)，(II)，(III)を満たしながら積み木を 1 本ずつ抜き取り，縦横に底面を下にして積み上げる操作を繰り返し，図(b)のようにどの積み木も抜き取ることができない状態になったものをタワーと呼ぶ.

> (I) 積み木は最上階から抜き取ってはいけない．最上階に 3 本そろわないうちに，そのすぐ下の階から抜き取ってはいけない.
>
> (II) 最上階に空きがあるときは，最上階に積む.
>
> (III) 各階において，積み木 3 本のうち，両端の 2 本が残るか，または中央の 1 本が残るように抜き取る.

タワー T の階数を k $(k \geqq n)$ とし，各 l $(1 \leqq l \leqq k)$ に対し，$T(l)$ は第 l 階に含まれる積み木の本数を表す．たとえば，$n=3$ のとき，図(b)のようなタワー T に対しては $k=5$ となり，$T(1)=2$，$T(2)=1$，$T(3)=2$，$T(4)=3$，$T(5)=1$ となる．T の定義により，$l \neq k-1$ に対し，$T(l)=1$ または $T(l)=2$ が成り立つ．また条件より $T(k-1)=3$ であり，$T(k)=2$ または $T(k-2)=2$ が成り立つ.

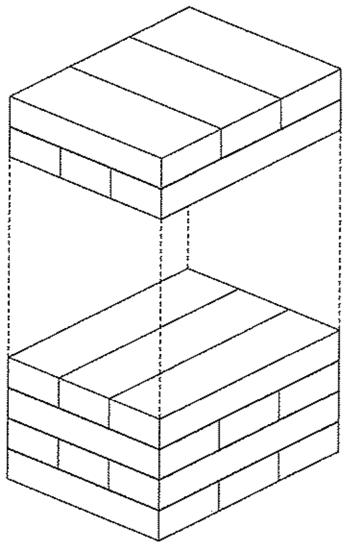
(1) $\displaystyle\sum_{l=1}^{k} T(l)=\boxed{\text{ア}}$

(2) $n=3$ のとき，k のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{イ}} \leqq k \leqq \boxed{\text{ウ}}$ となる．k の最大値を M とする．一般の n に対し，M は n を用いて $M=\boxed{\text{エ}}$ と表される.

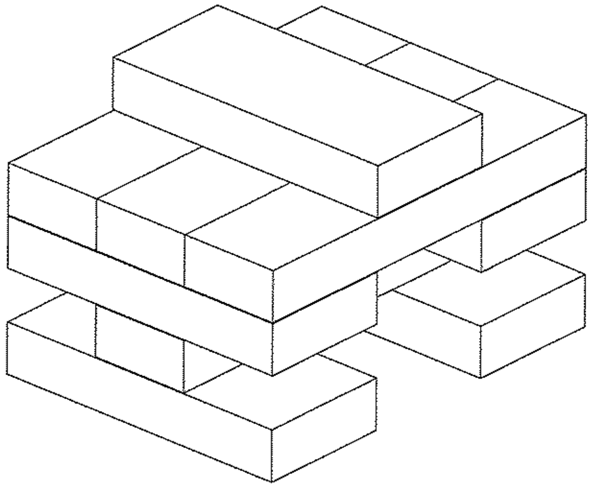
(3) 途中の操作に関係なく，各階の積み木の本数がすべて等しいタワーは同じものと考える．n を固定したとき，実現可能なタワーの個数を $J(n)$ とする.

(i) $n=3$ のとき，$k=5$ を満たすタワーは $\boxed{\text{オ}}$ 個ある.
また，$J(3)=\boxed{\text{カ}}$，$J(4)=\boxed{\text{キ}}$ である.

(ii) 数列 $\{F(l)\}$ は，$F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(l+2)=F(l+1)+F(l)$ $(l=1, 2, \ldots)$ を満たすとする．このとき $J(n)$ を n を用いて表せば，$J(n)=F(\boxed{\text{ク}})$ が成り立つ．したがって，$J(5)=\boxed{\text{ケ}}$ となる.



図(a)　初期状態



図(b)　$n=3,\ k=5$ のタワーの例

3　i を虚数単位とする．

(1)　$(1+i)^7=\boxed{\text{ア}}$

(2)　$(\sqrt{x}+i)^7$ の虚部は x の 3 次多項式 $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{イ}}$ は降べきの順に整理して答えよ．

(3)　$(\cos\theta+i\sin\theta)^7$ が実数のとき，$\theta=\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ である．ただし，$0<\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(4)　$a=\tan\boxed{\text{ウ}}$，$b=\tan\boxed{\text{エ}}$，$c=\tan\boxed{\text{オ}}$ とおき，多項式 $\boxed{\text{イ}}$ を因数分解すると

$$\boxed{\text{イ}}=\boxed{\text{カ}}\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ク}}\right)\left(x-\boxed{\text{ケ}}\right)$$

となる．ただし，$\boxed{\text{キ}}$ は a を，$\boxed{\text{ク}}$ は b を，$\boxed{\text{ケ}}$ は c を用いて表せ．

(5)　n が自然数のとき $(\sqrt{x}+i)^{2n+1}$ の虚部は x の n 次多項式になる．この多項式の n 次の係数は $\boxed{\text{コ}}$，$(n-1)$ 次の係数は $\boxed{\text{サ}}$ である．したがって，

$$\frac{1}{\tan^2\dfrac{1}{2n+1}\pi}+\frac{1}{\tan^2\dfrac{2}{2n+1}\pi}+\cdots+\frac{1}{\tan^2\dfrac{n}{2n+1}\pi}=\boxed{\text{シ}}$$

(6)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta<\theta<\tan\theta$ より $\dfrac{1}{\tan^2\theta}<\dfrac{1}{\theta^2}<\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\boxed{\text{ス}}$$

を得る．

メモ

メモ

メモ

メモ