令和２年度　入学試験問題

数　学　問題用紙（前期）

試験時間	９０分
問題用紙	１～８頁

注意事項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題用紙は持ち帰ること。

受験番号		氏　名	

［Ｉ］ 以下の文章の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。

実数の定数 a，b $(a>0)$ に対して，2 次関数 $f(x)=3ax^2+2x+b$ が

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=0, \qquad \int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2\,dx=6$$

を満たすとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$b=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

$$\int_{0}^{1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\pi},$$

$$\int_{0}^{1} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},$$

$$\int_{0}^{1} x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\pi}-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\pi^{\boxed{\text{シ}}}},$$

であることを用いれば，定積分

$$\int_{-1}^{1} \left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2 dx$$

が最小となる定数 p，q の値は $p=\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}-\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}\,\pi^{\boxed{\text{テ}}}}$，$q=\boxed{\text{ト}}$ となる。

（計　算　用　紙）

［II］ O を原点とする xyz 空間において以下の各問いに答えよ。

問 1 点 $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(-2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3})$ に垂直な平面 α の方程式を求めよ。

問 2 ベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ と問 1 の $\vec{n}$ とのなす角を求めよ。

問 3 連立不等式 $z \geqq 0$，$x^2+y^2+z^2 \leqq 9$ で表される図形を，問 1 の平面 α によって 2 つの部分に分割するとき，点 $(0,\ 0,\ 3)$ を含む部分の体積を求めよ。

（計　算　用　紙）

[III]　正の実数 t, k に対して，座標平面上の点 $\mathrm{T}_t(k)$ を次で定める。

$$\mathrm{T}_t(k) = \left(\frac{k}{1+t^2k^2}, \frac{tk^2}{1+t^2k^2} \right)$$

また，各 k に対して，t が正の実数全体を動くときの点 $\mathrm{T}_t(k)$ の描く曲線を $C(k)$ とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に適する数または式を解答欄に記入せよ。答えのみでよい。

$C(k)$ は点 $\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$ を中心とする，半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の一部である。

問 2　各 t に対して，点 $\mathrm{T}_t\left(\frac{1}{2}\right)$ における $C\left(\frac{1}{2}\right)$ の法線を $l_1(t)$，点 $\mathrm{T}_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $l_2(t)$ とする。このとき，2 直線 $l_1(t)$，$l_2(t)$ の方程式をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 3　問 2 の 2 直線 $l_1(t)$，$l_2(t)$ の交点 $\mathrm{P}(t)$ の座標を求めよ。答えのみでよい。

問 4　t が正の実数全体を動くとき，問 3 で定めた点 $\mathrm{P}(t)$ が描く曲線は，x 軸上に 2 つの焦点をもつ楕円の一部であることを示し，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さをそれぞれ求めよ。

（計 算 用 紙）

［IV］ 初期時刻 0 で白球が 3 個あり，以下の規則で定まる確率に従って球の色が白から黒，または黒から白に変化するものとする。以下では，各時刻 n ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) での白球の個数を $w(n)$，黒球の個数を $b(n)$ と表し ($w(n)+b(n)=3$)，また，実数 x は $0<x<1$ を満たすとする。

規則 1: $w(n)=3$ または $w(n)=2$ であるとき，時刻 n での各白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{1}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{2}{3}$ の確率で白球のままである。また，時刻 n での黒球は時刻 $n+1$ では確率 x で白球となり，確率 $1-x$ で黒球のままである。

規則 2: $w(n)=1$ であるとき，時刻 n での白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{2}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{1}{3}$ の確率で白球のままである。また，時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである。

規則 3: $w(n)=0$ であるとき，時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである。

各時刻 n ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) に対して，$w(n)=3$ である確率を p_n，$w(n)=2$ である確率を q_n，$w(n)=1$ である確率を r_n とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1 p_1，q_1 をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 2 次の連立漸化式が成り立つように，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に適する，n に無関係な数または式を解答欄に記入せよ。導出過程についても説明せよ。

$$\begin{cases} p_{n+1} = \boxed{\text{ア}}\, p_n + \boxed{\text{イ}}\, q_n, \\ q_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\, p_n + \boxed{\text{エ}}\, q_n \end{cases} \qquad (n=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

問 3 次の連立漸化式が成り立つような実数 α，β (ただし，$\alpha<\beta$) の組を求め，x を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\begin{cases} p_{n+2} - (\alpha+\beta)p_{n+1} + \alpha\beta p_n = 0, \\ q_{n+2} - (\alpha+\beta)q_{n+1} + \alpha\beta q_n = 0 \end{cases} \qquad (n=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

問 4　数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項を関数 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $I(x)$ を用いて

$$\begin{cases} p_n = F(x)\alpha^n + G(x)\beta^n, \\ q_n = H(x)\alpha^n + I(x)\beta^n \end{cases} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

と表したとき，$F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $I(x)$ を x の関数としてそれぞれ具体的に求めよ。答えのみでよい。

問 5　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$ が存在し，かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n} < 1$ が成り立つための x に対する必要十分条件を求めよ。