

入学試験問題(1次)

数 学

令和2年1月27日

9時00分—10時20分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
- 2 この問題冊子は表紙・白紙を除き10ページである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出ること。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- 4 解答は、各設問ごとに一つだけ選び、解答用紙の所定の解答欄の該当する記号を塗りつぶすこと。
- 5 解答を訂正する場合は、消しゴムできれいに消すこと。
- 6 監督員の指示に従って、問題冊子の表紙の指定欄に受験番号を記入し、解答用紙の指定欄に受験番号、受験番号のマーク、氏名を記入すること。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号					
------	--	--	--	--	--

上の枠内に受験番号を記入しなさい。

設問ごとに、与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つ選べ。

1 整式 $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ を整式 $2x - 1$ で割るとき、商が $ax^2 + bx + c$ 、余りが d となるとする。 $a + b + c + d$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

2 $x(y + z) = 35$, $y(z + x) = 32$, $z(x + y) = 27$ のとき、 $\frac{(xyz)^2}{400}$ の値を求めよ。 (x, y, z は実数とする)

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

3 x, y は自然数とする ($x \geq 5, y \geq 3$)。

$1 + \log_x(y - 2) = 4 \log_x^2 2 + 3 \log_x^3(y + 6)$ が成立するとき、 $|x - y|$ の最小値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

4 関数 $f(x) = a \cos^2 x + (a - b) \sin x \cos x + b \sin^2 x$ の最大値が $3 + \sqrt{7}$, 最小値が $3 - \sqrt{7}$ となるとき, $a + b$ の値を求めよ。(a, b は実数, $a \neq b$)

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

5 座標平面上において, 直線 $L_1 : y = 1$ と直線 L_1 上の点 $A(t, 1)$ ($t > 0$) と原点 O を結ぶ線分 OA の垂直二等分線を L_2 とする。線分 OA の中点を B , 直線 L_2 と x 軸との交点を C とする。 $\triangle OBC$ の面積が 1 となるとき, t の値は異なる 2 つの実数 α, β ($\beta > \alpha > 0$) の値をとる。
 $\alpha + \beta$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

6 座標平面上の 3 点 $A(1, 0)$, $B(-\frac{3}{2}, 0)$, $C(0, 1)$ を頂点とする $\triangle ABC$ と直線 $l : y = mx$ (m は正の実数) について考える。 $\triangle ABC$ の面積が, 直線 l によって二等分されるとき, $9m$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

7 四角形 ABCD は、円に内接する。AB = 1, BC = 2, CD = 3, DA = 4 を満たすとき、四角形 ABCD の面積を S とする。 $\frac{\sqrt{6}}{2}S$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

8 複素数 $Z = \frac{(1+i)^3(a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2}$ ($i^2 = -1$, $|Z| = \frac{2}{3}$) (a は実数) について考える。 Z^n が実数となる自然数 n の最小値を m とするとき、 $\frac{m}{2}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

9 3次方程式 $x^3 + (2a^2 - 1)x^2 - (5a^2 - 4a)x + 3a^2 - 4a = 0$ (a は実数) が実数の 2 重解をもつとき、 a のとりうる値の和を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

10 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ のなす角が 60° であるとする。
 \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ としたとき, $|7 \cos \theta|$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

11 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 の数字が書かれている 10 枚のカードから異なる 3 枚のカードを選ぶこととする。選んだカードの数字の積が奇数となる確率を P , 選んだカードの数字の積が 4 の倍数となる確率を Q とする。
 $\frac{Q}{P}$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

12 楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$, a, b は実数, $a \neq b$) と
 直線 $l: x = t$ ($-a < t < a$) について考える。

楕円 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし, 点 A の座標を $(-a, 0)$ と定める。

A, P, Q の各点を頂点とする三角形の面積の最大値を M とする。 $\frac{4\sqrt{3}}{ab} M$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

13 曲線 $C: y = 5 \cos^2 x + 5\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2}k$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) (k は正の実数) について考える。曲線 C と x 軸が接するとき、 k の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

14 円 $C1: x^2 + y^2 = 1$ と曲線 $C2: y = x^2 - 2$ について考える。

円 $C1$ 上の点 $P(\alpha, \beta)$ ($\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$) における円 $C1$ の接線と曲線 $C2$ で囲まれた図形の面積の最小値を m とする。 $4m^2$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

15 $I = \int_0^{2\pi} e^{3x} \sin kx dx$ (k は自然数) について考える。

$S = e^{6\pi} + \lim_{k \rightarrow \infty} kI$ とするとき、 S の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 ㊦ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

16 曲線 $C: \sqrt{\frac{x}{6}} + \sqrt{\frac{y}{4}} = 1$ (x, y は実数, $x \geq 0, y \geq 0$) について考える。

曲線 C と x 軸と y 軸で囲まれた図形の面積を S とする。 S の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 ㊦ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

次の文章を読み、以下の問い(問題 17~21)に対する選択肢から最も適当なものを一つ選べ。

曲線 $C_k: y = e^{-kx}$ (k は自然数, x は正の実数) について考える。曲線 C_k 上の点 $P_k(t, e^{-kt})$ (t は正の実数) における曲線 C_k の接線を L_k とし, L_k と x 軸との交点を A_k , L_k と y 軸との交点を B_k とする。(原点を O とする)

I $k = 1$ のとき, $\triangle OA_1B_1$ の面積は, $t =$ 17 で最大値 18 となる。

17

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ 2 | ㉣ 3 | ㉤ 4 |
| ㉥ 5 | ㉦ 6 | ㉧ 7 | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

18

- | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| ㉠ $\frac{1}{e}$ | ㉡ $\frac{2}{e}$ | ㉢ $\frac{3}{e}$ | ㉣ $\frac{4}{e}$ | ㉤ $\frac{5}{e}$ |
| ㉥ $\frac{1}{2e}$ | ㉦ $\frac{3}{2e}$ | ㉧ $\frac{2}{3e}$ | ㉨ $\frac{5}{3e}$ | ㉩ $\frac{7}{3e}$ |

II $\triangle OA_k B_k$ の面積は、 $t = \boxed{19}$ のとき、最大値 $\boxed{20}$ をとる。

19

㉠ $\frac{1}{k^2}$ ㉡ $\frac{2}{k^2}$ ㉢ $\frac{3}{k^2}$ ㉣ $\frac{1}{2k^2}$ ㉤ $\frac{3}{2k^2}$

㉥ $\frac{1}{2k}$ ㉦ $\frac{3}{2k}$ ㉧ $\frac{1}{k}$ ㉨ $\frac{2}{k}$ ㉩ $\frac{3}{k}$

20

㉠ $\frac{1}{k^2 e}$ ㉡ $\frac{2}{k^2 e}$ ㉢ $\frac{3}{k^2 e}$ ㉣ $\frac{1}{2k^2 e}$ ㉤ $\frac{3}{2k^2 e}$

㉥ $\frac{1}{2ke}$ ㉦ $\frac{3}{2ke}$ ㉧ $\frac{1}{ke}$ ㉨ $\frac{2}{ke}$ ㉩ $\frac{3}{ke}$

III $\triangle OA_k B_k$ の面積の最大値を S_k とする。

無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は、 $\boxed{21}$ することになる。

21

㉠ $\frac{\log 2}{e}$ に収束 ㉡ $\frac{\log 3}{e}$ に収束 ㉢ $\frac{\log 4}{e}$ に収束

㉣ $\frac{\log 2}{2e}$ に収束 ㉤ $\frac{\log 3}{2e}$ に収束 ㉥ 発散

㉦ $\frac{\log 2}{e^2}$ に収束 ㉧ $\frac{2 \log 2}{e^2}$ に収束 ㉨ $\frac{3 \log 2}{e^2}$ に収束

㉩ $\frac{4 \log 2}{e^2}$ に収束

次の文章を読み、以下の問い(問題 22~25)に対する選択肢から最も適当なものを一つ選べ。

k を 0 以上の整数とする。3 つの不等式 $y \leq -\frac{x}{2} + k$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) の個数を $f(k)$ と表記する。

I $f(0) = \boxed{22}$ となる。

22

- ㉠ 0 ㉡ 1 ㉢ 2 ㉣ 3 ㉤ 4
㉥ 5 ㉦ 6 ㉧ 7 ㉨ 8 ㉩ 9

II $f(3) = f(2) + R$ であるとき、 R は $\boxed{23}$ となる。

23

- ㉠ 0 ㉡ 1 ㉢ 2 ㉣ 3 ㉤ 4
㉥ 5 ㉦ 6 ㉧ 7 ㉨ 8 ㉩ 9

III $f(k) = f(k-1) + S$ であるとき、 S は $\boxed{24}$ となる。(k は 1 以上の整数とする。)

24

- ㉠ k ㉡ $2k$ ㉢ $3k$ ㉣ $k+1$ ㉤ $k+2$
㉥ $2k+1$ ㉦ $2k+2$ ㉧ $2k+3$ ㉨ $3k+2$ ㉩ $4k+3$

IV $f(k) = \boxed{25}$ と表すことができる。

25

- | | | | |
|--------------|--------------|-------------|--------------|
| ㉠ k^2 | ㉡ $2k^2$ | ㉢ $3k^2$ | ㉣ $(k+1)^2$ |
| ㉤ $2(k+1)^2$ | ㉥ $3(k+1)^2$ | ㉦ $(k+2)^2$ | ㉧ $2(k+2)^2$ |
| ㉨ $3(k+2)^2$ | ㉩ $(k+3)^2$ | | |

