3 （教育学部，理学部，医学部，工学部，農学部）

原点をOとする座標空間に2点A$(2, 1, -1)$，B$(-1, 2, 2)$がある。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の大きさ$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，および内積$\vec{a} \cdot \vec{b}$を求めよ。

(2) $\triangle$OABの面積を求めよ。

(3) 点Cは次の条件(a)，(b)，(c)をすべて満たすとする。

(a) 直線OCは，3点O，A，Bで定まる平面に垂直である。

(b) 線分OCの長さは$5\sqrt{2}$である。

(c) ベクトル$\overrightarrow{OC}$とベクトル$\vec{e} = (1, 0, 0)$とのなす角は，0以上，$\frac{\pi}{2}$以下である。

また，$0 < t < 1$を満たす実数tに対して，線分ABを$t : (1 - t)$に内分する点をDとする。

(i) 点Cの座標を求めよ。

(ii) 点Dの座標をtを用いて表せ。

(iii) $\triangle$OCDの面積を最小にするtの値を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

4 （教育学部，理学部，医学部，工学部，農学部）

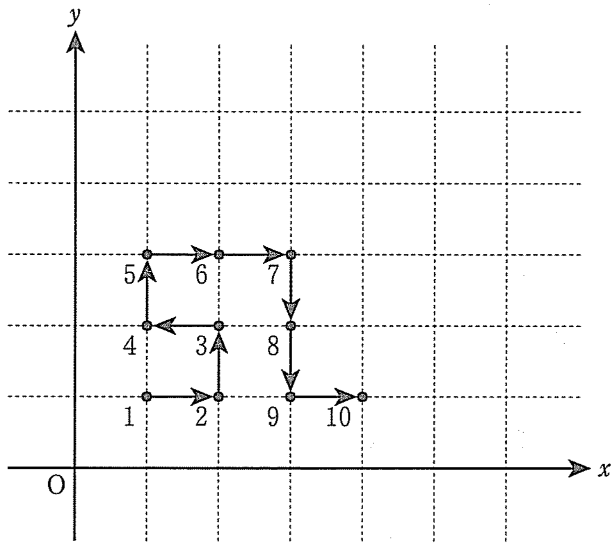
座標平面上で x 座標，y 座標がともに整数である点 $(x,\ y)$ のことを**格子点**という。以下において，格子点から格子点へと移動していく点Pを考える。

格子点 $(x,\ y)$ にいる点Pは，**1回の移動**で，格子点 $(x+1,\ y)$，$(x-1,\ y)$，$(x,\ y+1)$，$(x,\ y-1)$ のいずれかに移る。これらの移動をそれぞれ，**右への移動**，**左への移動**，**上への移動**，**下への移動**という。

Pは，はじめ格子点 $(1,\ 1)$ にあり，次の規則（★）に従って別の格子点へ移動していく。

（★）Pは格子点 $(1,\ 1)$ から右へ1回，上へ1回，左へ1回，上へ1回，右へ2回，下へ2回，順に移動し，格子点 $(3,\ 1)$ にたどり着く。以降同様に，$m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，Pは格子点 $(2m-1,\ 1)$ から右へ1回，上へ $(2m-1)$ 回，左へ $(2m-1)$ 回，上へ1回，右へ $2m$ 回，下へ $2m$ 回，順に移動し，格子点 $(2(m+1)-1,\ 1)$ にたどり着く。

次に，x 座標，y 座標がともに自然数である格子点に番号を付ける。まず，Pがはじめにいた格子点 $(1,\ 1)$ に番号1番を付ける。その後，Pが通った格子点に，順に番号2番，3番，4番，…を付ける。次の図は，Pの格子点 $(1,\ 1)$ から格子点 $(4,\ 1)$ までの移動と，番号1番から10番までの番号付けを表したものである。



以下の問いに答えよ。

(1) 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(i) 格子点 (5, 3) に付けられた番号は $\boxed{\text{ア}}$ 番である。

(ii) n を自然数とする。格子点 $(2n,\ 1)$ に付けられた番号は $\boxed{\text{イ}}$ 番であり，格子点 $(1,\ 2n+1)$ に付けられた番号は $\boxed{\text{ウ}}$ 番である。

(2) 自然数 n に対して，格子点 $(n,\ n)$ に付けられた番号を a_n 番とする。

(i) a_n を n を用いて表せ。

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(3) 番号 2020 番が付いた格子点の座標を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

6 （教育学部（「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B」受験者），理学部，医学部，工学部工学科理型入試（社会デザインコースを除く））

原点をOとする座標平面において，曲線 $y = x(\log x)^2$ $(x > 0)$ を C とする。C の変曲点をPとし，直線OPと C との交点のうち，Pと異なる点をQとする。また，C 上の点Qにおける接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x(\log x)^2$ $(x > 0)$ の導関数 y' と第2次導関数 y'' を求めよ。

(2) 点Pおよび点Qの座標を求めよ。

(3) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(4) 次の不定積分を求めよ。

(i) $\displaystyle\int x \log x \, dx$

(ii) $\displaystyle\int x(\log x)^2 \, dx$

(5) 曲線 $y = x(\log x)^2$ $(x \geqq 1)$，接線 ℓ，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

7 （理学部，医学部，工学部工学科理型入試（社会デザインコースを除く））

以下の問いに答えよ。ただし，0でない複素数zに対して，$z^0=1$と定める。

(1) αを$\alpha \neq 0$かつ$\alpha \neq 1$を満たす複素数とする。このとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) 2つの数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$が$x_1=1$，$y_1=0$および

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n-\dfrac{\sqrt{3}}{4}y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x_n+\dfrac{1}{4}y_n \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定められている。また，iを虚数単位とし，$z_n=x_n+iy_n$とおく。

(i) $z_{n+1}=\beta z_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$を満たす複素数$\beta$を求めよ。

(ii) 数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$の一般項を求めよ。

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$の実部を求めよ。

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}$を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

8 （医学部）

関数 $g(x)$ を $g(x)=8x(1-x)$ で定める。また，自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ （$0\leqq x\leqq 1$）を

$$f_1(x)=g(x)$$

$$f_{n+1}(x)=g(f_n(x)) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。さらに，関数 $|f_n(x)|$ （$0\leqq x\leqq 1$）の最大値を a_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) a_1 および a_2 を求めよ。

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の命題 $\mathrm{P}(n)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

$\mathrm{P}(n)$：$a_n\geqq 2$ であり，関数 $y=f_n(x)$ （$0\leqq x\leqq 1$）の値域は

$-a_n\leqq y\leqq 2$ である。

(3) n が 2 以上の自然数のとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(4) n が 2 以上の自然数のとき，不等式 $8a_n^2\leqq a_{n+1}\leqq 16a_n^2$ が成り立つことを示せ。

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\log a_n)}{n}$ を求めよ。