1 数列 $\{a_n\}$ は a_1 が正の整数で，公比が 1 でない正の実数であるような等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ は b_1 が整数で，公差が整数であるような等差数列とする。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) 数列 $\{a_n\}$ の各項は整数とする。数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 8$ であり，公差は 10 とする。$a_5 = b_5$ であるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_1 = 27$ であり，数列 $\{a_n\}$ の公比は 1 より小さいとする。また，$a_1 > b_1 > 0$ と $a_3 = b_3$ を満たすとする。このとき，数列 $\{b_n\}$ の公差が最大となる場合の数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の一般項の組をすべて求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の公比は 1 より大きいとする。また，$a_2 = b_2$ と $a_4 = b_4$ を満たすとする。このとき，数列 $\{b_n\}$ の公差が最小となる場合の数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ それぞれの一般項を求めよ。

2 θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす実数とし，x の 2 次方程式

$$2x^2 - (4\cos\theta)x + 3\sin\theta = 0$$

を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) この 2 次方程式が虚数解を持つような θ の値の範囲を求めよ。

(2) この 2 次方程式が異なる 2 つの正の解を持つような θ の値の範囲を求めよ。

(3) この 2 次方程式の 1 つの解が虚数解で，その 3 乗が実数であるとする。このとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) p, q を整数とする。このとき，$p-q$ が奇数であることと，$p+q$ が奇数であることは同値であることを証明せよ。

(2) $p^2-q^2=100$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

(3) $p^2-q^2=250$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を求めよ。

(4) $p^2-q^2=210000$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を求めよ。

4 x の多項式

$$f(x)=x^4-4x^3+5x^2-2x$$

に対して，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}$ と $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}$ を求めよ。

(2) 次の等式が x についての恒等式となるような定数 a, b, c, d の値を求めよ。

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}$$

(3) $t\geqq 3$ とする。定積分 $\displaystyle\int_3^t\frac{1}{f(x)}dx$ を求めよ。

(4) t が $3\leqq t\leqq 5$ を満たす範囲で動くとき，$F(t)=\displaystyle\int_3^t\frac{1}{f(x)}dx$ の最大値を求めよ。