1 xy 平面において曲線 $C: y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ を考える。$t > 0$ とし C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ 2 - \dfrac{t^2}{2}\right)$ における C の法線を l とする。l と C とで囲まれる図形を K とする。

(1) 法線 l の方程式を t を用いて表せ。

(2) $t > 0$ における K の面積 S の最小値を求めよ。

(3) l が原点 O を通るとき，K を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{2}$ nは自然数とする。変量xについての$2n$個のデータの値をx_i $(1 \leqq i \leqq 2n)$とし，変量yについての$2n$個のデータの値をy_i $(1 \leqq i \leqq 2n)$とする。kは$1 \leqq k \leqq 2n-1$を満たす整数とする。変量xとyの$2n$個の値の組を

$$(x_i,\ y_i) = \begin{cases} (i,\ i+2n-k) & (1 \leqq i \leqq k) \\ (i,\ i-k) & (k+1 \leqq i \leqq 2n) \end{cases}$$

で与える。xとyの共分散をs_{xy}とし，xとyの相関係数をrとする。

(1) s_{xy}をkとnを用いて表せ。

(2) $r=0$となるkは存在しないことを証明せよ。

(3) 自然数nに対してrを最小にするkをとり，そのときのrをr_nと表す。$\displaystyle\lim_{n \to \infty} r_n$を求めよ。

3 複素数 z の虚部を $\mathrm{Im}(z)$，偏角を $\arg z$ と表す。ただし，$0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする。また z に共役な複素数を $\overline{z}$ と表す。

α，β は互いに異なる 0 でない複素数とする。$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$（$i$ は虚数単位）とし，$g_1 = \alpha + \omega\beta$，$g_2 = \alpha + \omega^2\beta$ とおく。複素数平面上で α，β が表す点をそれぞれ A，B とする。また原点を O とする。

(1) 複素数 z に対して，$\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{i}{2}(z - \overline{z})$ であることを証明せよ。

(2) $\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta}) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(|g_1|^2 - |g_2|^2)$ であることを証明せよ。

(3) 3 点 O，A，B が同一直線上にあるための必要十分条件は $|g_1| = |g_2|$ であることを証明せよ。

(4) 3 点 O，A，B が同一直線上にあるとする。このとき，点 A が線分 OB を内分する点であるための必要十分条件は $\dfrac{2\pi}{3} < \arg\dfrac{g_1}{g_2} < \dfrac{4\pi}{3}$ であることを証明せよ。

4 実数全体で定義された関数$f(x)$は微分可能で$f(0)=0$を満たし，その導関数$f'(x)$は連続かつ単調に減少しているとする。

(1) nを自然数とし，kは$1 \leqq k \leqq n$を満たす整数とする。$\dfrac{k-1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{k}{n}$のとき，以下の不等式(a)，(b)が成り立つことを証明せよ。

(a) $f\left(\dfrac{k}{n}\right)+f'\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\left(x-\dfrac{k}{n}\right) \leqq f(x)$

(b) $f(x) \leqq f\left(\dfrac{k}{n}\right)+f'\left(\dfrac{k}{n}\right)\left(x-\dfrac{k}{n}\right)$

(2) $a_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$とおく。このとき

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = -\frac{1}{2} f(1)$$

であることを証明せよ。