

令和 2 年度 入 試
個別学力試験問題(前期日程)

数 学

[医学部・医学科]
[総合理工学部・数理科学科]

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は 3 ページ，解答用紙は 4 枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面を使つてはいけません。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

1] 自然数 m, n に対し, m と n の最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表す。以下はユークリッドの互除法を用いた最大公約数の求め方である。

ユークリッドの互除法

m, n を $m > n$ をみたす自然数とし, $r_1 = m, r_2 = n$ とおく。 r_1 を r_2 で割った商を q_2 , 余りを r_3 ($0 \leq r_3 < r_2$) とする。もし $r_3 \neq 0$ ならば r_2 を r_3 で割った商を q_3 , 余りを r_4 ($0 \leq r_4 < r_3$) とする。この手順を $k-1$ 回繰り返したとき, 余り r_{k+1} が 0 になれば, 次の関係式が成り立つ。

$$r_1 = m$$

$$r_2 = n$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$$

$$r_2 = r_3 q_3 + r_4 \quad (0 < r_4 < r_3)$$

⋮

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k \quad (0 < r_k < r_{k-1})$$

$$r_{k-1} = r_k q_k$$

このとき, m と n の最大公約数について,

$$\gcd(m, n) = \gcd(r_1, r_2) = \gcd(r_2, r_3) = \cdots = \gcd(r_{k-1}, r_k) = r_k$$

が成り立つ。

自然数 n に対し, すべての位の数字が 1 である n 桁の自然数を a_n とおく。例えば, $a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111$ であり, すべての n に対して

$$a_n = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$$

である。次の問いに答えよ。

- (1) ユークリッドの互除法を用いて、12345 と 54321 の最大公約数を求めよ。
- (2) $m > n$ をみたす自然数 m と n に対し、等式 $a_m - a_n = 10^n a_{m-n}$ が成り立つことを示せ。
- (3) すべての自然数 n に対し、 a_n と 10 は互いに素である。このことと (2) の結果を用いて、 $m > n$ をみたす自然数 m と n に対し、 $\gcd(a_m, a_n) = \gcd(a_n, a_{m-n})$ が成り立つことを示せ。
- (4) $m > n$ をみたす自然数 m と n の最大公約数を d とすると、 a_m と a_n の最大公約数は a_d であることを示せ。ただし、必要であれば、枠で囲まれたユークリッドの互除法の説明文で使用されている記号を用いてもよい。
- (5) (1) と (4) を用いて、 a_{12345} と a_{54321} の最大公約数を求めよ。

2 $a \neq 1$ とする。円 $C_1: x^2 + y^2 - 4ax - 2ay = 5 - 10a$, 円 $C_2: x^2 + y^2 = 10$, 円 $C_3: x^2 + y^2 - 8x - 6y = -10$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 円 C_1 が原点を通るとき、円 C_1 の中心と半径を求めよ。
- (2) 定数 a の値にかかわらず円 C_1 は定点 A を通る。この定点 A の座標を求めよ。
- (3) 円 C_2 と円 C_3 の 2 つの交点と原点を通る円の中心と半径を求めよ。

□3 1枚のコインを投げて、表が出た場合は得点1を、裏が出た場合は得点2を与える。コインを k 回投げたときの得点の合計が n である確率を $p(k, n)$ とし、 $c_n = \sum_{k=1}^n p(k, n)$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。ただし、コインの表と裏の出る確率は等しいものとする。

- (1) c_2, c_3 を求めよ。
- (2) $p(k+1, n+2)$ を $p(k, n+1)$ と $p(k, n)$ を用いて表せ。
- (3) c_{n+2} を c_{n+1} と c_n を用いて表せ。
- (4) 漸化式

$$c_{n+2} - \alpha c_{n+1} = \beta(c_{n+1} - \alpha c_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたす実数の組 (α, β) を2つ求めよ。

- (5) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

□4 次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $2\sqrt{x} > \log x$ を証明せよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x+1}$ を求めよ。
- (3) a は正の定数で、不等式 $\frac{\log x}{x+1} \leq \log \frac{ax}{x+1}$ がすべての正の数 x に対して成り立つとする。このとき、 a の値の範囲を求めよ。
- (4) 等式 $\int_1^2 \log \frac{ax}{x+1} dx = 2 \int_1^2 \frac{\log x}{x^2} dx$ が成り立つような正の数 a を求めよ。