

# 数 学

〔理学部(数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・地球科学プログラム)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

## 注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて4ページである。
3. 問題は、**1** ~ **5** の5題ある。
4. 解答用紙は、**1** ~ **5** のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. **3** は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら、まず、掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が、自分に配付された数と合っているか確認し、もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に、解答用紙をミシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し、学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に入力してから、解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は、必ず所定の解答用紙の解答欄に入力し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

- (1)  $p, q$  を実数とする。2 次方程式  $x^2 + px + q = 0$  が異なる解  $\alpha, \beta$  をもつとき、 $\frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$  を  $p, q$  を用いて表せ。
- (2) 斜辺の長さが一定の直角三角形のうち、面積が最大のものは、直角二等辺三角形であることを示せ。
- (3)  $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \cos 1$  という 4 つの数値を小さい方から順に並べよ。ただし、1, 2, 3 は、それぞれ 1 ラジアン, 2 ラジアン, 3 ラジアンを表す。

2  $0 < a < 1$  とする。このとき、次の関数  $f(x)$  を考える。

$$f(x) = x^3 + 3\left(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a} + \log_{\frac{1}{8}}4\right)x^2 - 4\left(\log_{\frac{1}{4}}a\right)x - 4\left(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a}\right)^3$$

- (1)  $b = \log_{\frac{1}{4}}a$  とおく。関数  $f(x)$  を、対数が現れない形で、 $b$  を用いて表せ。
- (2)  $f'(x) = 0$  となる  $x$  を求めよ。
- (3)  $f(x)$  の極大値が  $\frac{9}{2}$  であるとする。このとき、 $a$  の値を求めよ。

3 次の 3—1, 3—2, 3—3 から 1 題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に、解答する問題の番号を記入すること。

3—1 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある。

$$a_1 = 2, \quad (n+1)a_{n+1} = (n+3)a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $b_n = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$  とするとき、 $b_{n+1} - b_n$  を  $n$  を用いて表せ。

(2) 次の等式が  $k$  についての恒等式となるように、定数  $p$  の値を定めよ。

$$\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{1}{(k+2)(k+1)} - \frac{1}{(k+3)(k+2)} \right\}$$

(3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

3—2 平面上の三角形 ABC は  $\angle BAC = 60^\circ$  の三角形で、 $AB = 5$ ,

$AC = 8$  とする。 $\angle BAC$  の二等分線と辺 BC の交点を D とし、 $\angle ABC$  の二等分線と辺 AC の交点を E とする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2)  $\vec{AD}$ ,  $\vec{BE}$  を  $\vec{AB}$  と  $\vec{AC}$  を用いて表せ。

(3) 線分 AD と線分 BE の交点を I とするとき、 $\vec{AI}$  を  $\vec{AB}$  と  $\vec{AC}$  を用いて表せ。

**3—3**

1, 2, 3, 4, 5, 6の数字が1つずつ記入された6枚のカードを袋の中に入れる。この袋の中から2枚のカードを同時に抜き出し、それらのカードの数の大きい方を $X$ 、小さい方を $Y$ とする。

- (1) 確率変数 $X$ の期待値 $E(X)$ を求めよ。
- (2) 確率変数 $X$ と $Y$ は互いに独立であるか、独立でないか、答えよ。
- (3) 確率変数 $XY$ の期待値 $E(XY)$ を求めよ。

4 実数全体で微分可能な関数  $f(x)$  が

$$f(x) = e^{-x} \left( \frac{1}{2} x^2 + \int_0^x e^t f(t) dt \right)$$

を満たすとする。ただし、 $e$  は自然対数の底とし、以下では、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$  を用いてよいものとする。

- (1)  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ。また、 $f(x)$  を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、グラフの概形をかけ。
- (3)  $a > 0$  とする。曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = 1$ ,  $x = 0$  および  $x = a$  で囲まれた部分の面積  $S(a)$  を求めよ。また、 $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$  を求めよ。

5  $\alpha$  は複素数、 $A$  は実数で  $|\alpha|^2 - A > 0$  を満たすものとする。複素数  $z$  に関する方程式

$$|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + A = 0$$

を(★)とする。ただし、 $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{z}$  はそれぞれ  $\alpha$ ,  $z$  の共役複素数とする。

- (1) (★) は円を表す方程式であることを示せ。また、この円の中心および半径を  $\alpha$  と  $A$  を用いて表せ。
- (2) 複素数平面上の 0 でない異なる 2 点  $z_1, z_2$  が  $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = 0$  を満たすならば、3 点  $0, z_1, z_2$  は同一直線上にあることを示せ。ただし、 $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  はそれぞれ  $z_1, z_2$  の共役複素数とする。
- (3) 複素数平面上の異なる 3 点  $0, z_1, z_2$  は同一直線上にないものとする。3 点  $0, z_1, z_2$  を通る円が(★)で表されるとき、 $A$  の値を求め、さらに  $\alpha$  を  $z_1$  と  $z_2$  を用いて表せ。