令和3年度入学試験問題

数　学

(前期日程)

	学部等	ページ	解答用紙枚数
1	工学部 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】	1～8	5
2	医学部 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】	9～16	5
3	教育学部(小主免理系・中主免理系) 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】	17～23	4
4	教育学部(小主免理系・中主免理系を除く) 農学部 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B】	24～27	3

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 上記の1から4のうち，志願したものを選び解答すること。1から4のそれぞれの初めのページに注意事項が記載されているので，試験開始後，よく読んで解答を始めること。
3. すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入すること。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点されないことがある。
4. 指定されたもの以外を解答しても，また解答用紙の指定された解答欄以外の場所に解答しても採点の対象とはされないので，十分注意すること。
5. 試験中に問題冊子および解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁および汚損等がある場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

医　学　部

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

問　題	必答／選択
1	必答
2	必答
3	必答
4	必答
5	(1)は必答 (2)は［A］，［B］の一方を選択

注　意　事　項

1. 問題は，1，2，3，4 および5の5問ある。これら5問をすべて解答すること。
2. 問題5の(2)は［A］または［B］のいずれか一方を選択して解答すること。選択する際，5の解答用紙に記載されている注意事項もよく読むこと。
3. 解答は問題ごとに指定された解答用紙の解答欄に記入すること。解答欄が不足する場合は，「裏面に続く」と書き，裏面の枠内を使用すること。

1 p, qを実数とする。点Oを原点とする座標空間において，4点

$$\mathrm{A}(1,1,0),\ \mathrm{B}(0,2,0),\ \mathrm{C}(0,0,6),\ \mathrm{D}(p,q,1)$$

をとる。3点A, B, Cを含む平面をαとし，$\angle\mathrm{AOD}$の大きさをθとし，$\triangle\mathrm{AOD}$の面積をSとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\cos\theta$を，pとqを用いて表せ。

(2) 面積Sを，pとqを用いて表せ。

(3) 点Dが平面α上を動くとき，面積Sの最小値を求めよ。

2 a, bを実数とする。このとき，変数xの関数

$$f(x) = \sin 2x + a(\sin x + \cos x) + b$$

について，次の各問に答えよ。

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおくとき，$f(x)$を，tを用いて表せ。

(2) xの方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも1つの実数解を持つようなすべてのa, bを，座標平面上の点(a, b)として図示せよ。

3 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ および座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

(2) (1)で求めた極限値を a とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の増減と極値，および曲線 C の漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ。

4 A，B，C，Dの4人がそれぞれ袋を持っている。

Aの袋には，3枚の札 $\boxed{\text{B}}$， $\boxed{\text{C}}$， $\boxed{\text{D}}$ が入っている。

Bの袋には，3枚の札 $\boxed{\text{A}}$， $\boxed{\text{C}}$， $\boxed{\text{D}}$ が入っている。

Cの袋には，2枚の札 $\boxed{\text{A}}$， $\boxed{\text{B}}$ が入っている。

Dの袋には，2枚の札 $\boxed{\text{A}}$， $\boxed{\text{B}}$ が入っている。

この4人の間で，1個の玉の受け渡しを次のように行う。

(※) はじめに，Aが玉を持っている。

Aは自分の袋から無作為に1枚の札を取り出し，その札に書かれた人へ玉を手渡し，取り出した札を自分の袋へもどす。以降，「玉を手渡された人は自分の袋から無作為に1枚の札を取り出し，その札に書かれた人へ玉を手渡し，取り出した札を自分の袋へもどす」ことをくり返す。ただし，Aが袋から札を取り出すとき，どの札も同じ確率で取り出されるものとする。B，C，Dが袋から札を取り出すときも同様とする。

(※) の状態から始めて，玉の受け渡しが n 回 $(n \geqq 1)$ 行われたとき，

A，B，C，Dが玉を持っている確率をそれぞれ A_n，B_n，C_n，D_n

とする。また，(※) の状態において，A，B，C，Dが玉を持っている確率をそれぞれ A_0，B_0，C_0，D_0 とする。すなわち $A_0 = 1$，$B_0 = 0$，$C_0 = 0$，$D_0 = 0$ である。このとき，次の各問に答えよ。なお，すべての n について $C_n = D_n$ であることは，用いてよい。

(1) A_1，B_1，C_1，A_2，B_2，C_2 を求めよ。

(2) n が自然数のとき，A_n を，B_{n-1} と C_{n-1} を用いて表せ。また，B_n を，C_{n-1} と A_{n-1} を用いて表せ。さらに，C_n を，A_{n-1} と B_{n-1} を用いて表せ。

(3) n が0または正の整数のとき，A_n を，n を用いて表せ。

(4) $\lim_{n \to \infty} A_n$ を求めよ。

5 次の各問に答えよ。

(1) **(必答)**

次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{し}}$ を適切な整数で埋めよ。

$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y-3$ を因数分解すると,

$$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y-3=(x+ay+b)(3x+cy+d)$$

となる。このとき, 定数 a, b, c, d の値は

$$a=\boxed{\text{あ}},\ b=\boxed{\text{い}},\ c=\boxed{\text{う}},\ d=\boxed{\text{え}}$$

である。

これを用いて, 等式

$$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y+9=0$$

を満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ を求めると, そのような組 $(x,\ y)$ は4つあることがわかり, それらを x の値が小さい方から順に並べると,

$$\left(\boxed{\text{お}},\ \boxed{\text{か}}\right),\ \left(\boxed{\text{き}},\ \boxed{\text{く}}\right),\ \left(\boxed{\text{け}},\ \boxed{\text{こ}}\right),\ \left(\boxed{\text{さ}},\ \boxed{\text{し}}\right)$$

となる。

(2) 15ページの[A], 16ページの[B]のいずれか一方を選択し, 解答せよ。

5(2)は，［A］，［B］のいずれか一方を選択し，解答せよ。

［A］（選択）

次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ を適切な数で埋めよ。ただし，i は虚数単位とする。

複素数

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i, \qquad z_2 = 5 + 5\sqrt{3}\,i, \qquad z_3 = 5 - 4\sqrt{3} + (4 + 5\sqrt{3})\,i$$

および $\alpha = 1 + \sqrt{2}\,i$ に対し，αz_1，αz_2，αz_3 で表される複素数平面上の点をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする。

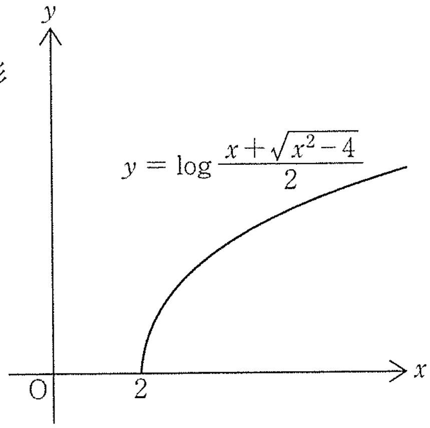
このとき，$\dfrac{z_3}{1+\sqrt{3}\,i} = x + yi$（$x$，$y$ は実数）となる x，y の値は $x = \boxed{\text{ア}}$，$y = \boxed{\text{イ}}$ である。また，$|\alpha| = \boxed{\text{ウ}}$ である。さらに，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である。

5(2)は，［A］，［B］のいずれか一方を選択し，解答せよ。

［B］（選択）

次の空欄 $\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ を適切な数または数式で埋めよ。ただし，$\boxed{\text{カ}}$ は x だけを用いて表された数式，$\boxed{\text{キ}}$ は y だけを用いて表された数式，$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ は整数で埋めよ。また，$\log x$ は x の自然対数を表す。

曲線 $y=\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ $(x \geqq 2)$ の概形は右図のようになる。



$y=\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ のとき，

$$(2e^y-x)^2=\boxed{\text{カ}}$$

であり，

$$x=\boxed{\text{キ}}$$

である。

曲線 $y=\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ と x 軸および直線 $x=4$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を V とする。体積 V は，

$$V=\int_2^4 \boxed{\text{ク}}\,dx$$

により求めることができる。$\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}=t$ とおくと，V は，t だけで表される数式 $f(t)=\boxed{\text{ケ}}$ と $a=\log(2+\sqrt{3})$ を用いて，

$$V=\int_0^a f(t)\,dt$$

と表される。ここで，0でない定数 k に対し，関数 t^2e^{kt} の不定積分は

$$\int t^2e^{kt}dt=\frac{e^{kt}}{k^3}\left(\boxed{\text{コ}}\right)+C \qquad (C\text{は積分定数})$$

である。よって，

$$V=4\pi\left(a^2-\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,a+\boxed{\text{シ}}\right)$$

である。