令和3年度入学者選抜学力検査問題(前期日程)

数　　学

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

(医学部医学科)

(注　意)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は4ページ，解答用紙は4枚である。
   指示があってから確認すること。
3. 解答はすべて解答用紙の指定のところに記入すること。
   解答用紙の表面だけで書ききれない場合は，裏面の下半分を使用することができる。
4. **解答用紙は持ち帰ってはならないが，**問題冊子は必ず持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 0以上の整数nを2進法で表したときに2^0の位の値，2^1の位の値，……，$2^{D(n)-1}$の位の値をそれぞれb_1，b_2，……，$b_{D(n)}$とする。ただし，$D(n)$はnを2進法で表したときの桁数である。このとき

$$a_n = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\cdots + b_{D(n)}\left(\frac{1}{2}\right)^{D(n)}$$

で定義される数列$\{a_n\}$を考える。例えば，

$n=0$のとき　2進法では0のため

$$a_0 = 0$$

$n=1$のとき　2進法では1のため

$$a_1 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$n=2$のとき　2進法では10のため

$$a_2 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$n=3$のとき　2進法では11のため

$$a_3 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$n=4$のとき　2進法では100のため

$$a_4 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

となる。以下の問いに答えよ。

(1) $2^k \leqq n < 2^{k+1}$（ただしkは自然数）のとき，a_nをa_{n-2^k}を用いて表せ。

(2) a_0からa_{130}までの数列の和$S_{130} = \sum_{i=0}^{130} a_i$を求めよ。

(3) kを2以上の自然数とするとき，$a_n < \frac{1}{4}$（$0 \leqq n \leqq 2^k$）となる項の数を求めよ。

〔Ⅱ〕 複素数 ω，z が $|\omega|=\sqrt{3}$，$z=\dfrac{\omega}{\omega+1}$ を満たすとする。複素数平面上の点 A(ω)，B(z)，原点 O に対し，S を，この 3 点が一直線上にないときは △OAB の面積とし，一直線上にあるときは 0 と定める。以下の問いに答えよ。

(1) S を ω，$\overline{\omega}$ を用いて表せ。ただし，$\overline{\omega}$ は ω の共役複素数である。

(2) S の最大値を求めよ。また，このとき △OAB はどのような三角形か。

〔Ⅲ〕 A は $A > 1$ を満たす実数とする。$A \leqq a \leqq A+1$ を満たす実数 a に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a^x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

とし，xy 平面上の曲線 C を

$$C : y = f(x) \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) a が $A \leqq a \leqq A+1$ の範囲を動くとき，曲線 C が通過する領域の面積 $S(A)$ を A を用いて表せ。

(3) (2)で定めた $S(A)$ に関する次の極限

$$\lim_{A \to \infty} S(A) \log A$$

を求めよ。ただし，

$$\lim_{A \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{A}\right)^A = 1$$

であることを用いてよい。

〔Ⅳ〕 p は $0 < p \leqq 1$ を満たす実数とする。0 以上の整数 n に対して

$$J_n = \int_0^p \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 m に対して，定積分 $\int_0^p \frac{x^m}{1+x^2}\,dx$ と $\frac{1}{m+1}$ の大小関係を調べよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{p^{2n-1}}{2n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を J_n を用いて表せ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$ の和を求めよ。