令 和 4 年 度　入 学 試 験 問 題

数　学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号 (2 カ所)・氏名を記入すること。
3. 各志願者は，下の表 **(1)** に指示した問題を解答すること。
   情報データ科学部については，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ は必須問題であり，$\boxed{9}$* $\boxed{10}$* は選択問題である。選択問題はいずれか 1 問を選択し解答すること。選択する場合には，解答用紙左上にある選択欄に ◯ を，選択しない場合は × を記入すること。
   教育学部については，志望するコース（系）により，下の表 **(2)** のように分類する。
4. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。
5. 解答用紙は持ち出さないこと。

試験開始後，問題冊子のページ，及び解答用紙の問題の番号を確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

表 (1)　**(*印は選択問題を表す。いずれか 1 問を解答すること。)**

志望学部	問題の番号
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
教育学部B 薬学部 歯学部 工学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$
医学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
情報データ科学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{9}$* $\boxed{10}$*

表 (2)

分類	志望するコース（系）
教育学部A	小学校教育コース 幼児教育コース 特別支援教育コース 中学校教育コース（実技系）
教育学部B	中学校教育コース（理系）

1 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が次の連立不等式

$$x + 2y \leqq 6, \qquad 3x + y \leqq 9, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0$$

の表す領域を動くとき，$2x + y$ の最大値，およびそのときの P の座標を求めよ。

(2) $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

$$\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta \geqq 1$$

(3) 以下で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，一般項 a_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k a_k$ を，それぞれ求めよ。

(4) 母線の長さが 1，高さが h の円錐(すい)がある。この円錐の体積を $V(h)$ とするとき，$V(h)$ の最大値，およびそのときの h の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 空間内の 4 点 $O(0,0,0), A(1,2,3), B(1,1,-1), C(7,3,5)$ がある。直線 OA 上の動点 P に対して，線分 BP, CP の長さの平方の和 $BP^2 + CP^2$ の最小値と，線分の長さの和 $BP + CP$ の最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$ (t は実数) とするとき，$BP^2 + CP^2$ を t の式で表せ。

(2) $BP^2 + CP^2$ の最小値と，そのときの P の座標を求めよ。

(3) 2 点 B, C から直線 OA に垂線を下ろし，交点をそれぞれ H, K とするとき，H, K の座標を求めよ。また，2 つのベクトル $\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{KC}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(4) $BP + CP$ の値が最小となるのは，P が線分 HK をどのような比に分けるときかを説明せよ。また，そのときの P の座標，および $BP + CP$ の値を求めよ。

3 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) $a > 0$ とする。$a + a^{-1} = 18$ のとき，$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ および $a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}$ の値を，それぞれ求めよ。

(2) 次の方程式

$$\log_{\frac{1}{3}}(9x^2) \cdot \log_3\left(\frac{x}{81}\right) = -12$$

を解け。

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

$$\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$$

(4) 次の方程式

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

を解け。ただし，i は虚数単位である。

4 空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{A}(1,2,3), \mathrm{B}(1,1,-1), \mathrm{C}(7,3,5)$ がある。直線 OA 上の動点 P に対して，線分 BP, CP の長さの平方の和 $\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，線分の長さの和 $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (t は実数) とするとき，$\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ を t の式で表せ。

(2) $\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの P の座標を求めよ。

(3) 2 点 B, C から直線 OA に垂線を下ろし，交点をそれぞれ H, K とするとき，H, K の座標を求めよ。また，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HB}}, \overrightarrow{\mathrm{KC}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(4) $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の値が最小となるのは，P が線分 HK をどのような比に分けるときかを説明せよ。また，そのときの P の座標，および $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の値を求めよ。

5 自然数 n に対して，以下で定義される x の 2 次関数 $f_n(x)$ がある。

$$f_1(x) = 3x^2$$
$$f_2(x) = 3x^2 + 4x$$
$$\vdots$$
$$f_{n+2}(x) = 3x^2 + 4x\int_0^1 f_{n+1}(t)dt - \int_0^1 f_n(t)dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2 の値を，それぞれ求めよ。

(2) a_{n+2} を，a_{n+1} と a_n を用いて表せ。

(3) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする。b_n と a_n を，それぞれ n の式で表し，2 次関数 $f_n(x)$ を求めよ。

(4) $x = \alpha$ で，$f_{n+1}(x) - f_n(x)$ は，すべての自然数 n に対して一定の値 β をとる。このとき，α と β の値を求めよ。また，2 つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = f_{n+1}(x)$，および直線 $x = \alpha$ で囲まれる図形の面積 S_n を求めよ。

6 曲線 $C: y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, e^t)$ における接線を l とする。ただし，$0<t<1$ である。以下の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。また，l と y 軸との交点を Q とし，l と x 軸との交点を R とする。このとき，2 点 Q, R の座標を，それぞれ求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ および $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を，それぞれ求めよ。

(3) l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を D_1 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_1(t)$ とする。同様に，C と l および y 軸で囲まれた図形を D_2 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_2(t)$ とする。このとき，$V_1(t)$ と $V_2(t)$ を，それぞれ t を用いて表せ。

(4) $V(t)=V_1(t)+V_2(t)$ とするとき，$V(t)$ の最小値，およびそのときの t の値を求めよ。

7 原点を O とする xy 座標平面上に，楕円(だ) $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$ と，C 上を動く点 $\mathrm{P}(a\cos\alpha, b\sin\alpha) \ (0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) C の方程式の両辺を x で微分し，P における C の接線の傾きを求めよ。また，この接線の方程式は $\dfrac{\cos\alpha}{a}x + \dfrac{\sin\alpha}{b}y = 1$ であることを示せ。

(2) P における C の接線と x 軸および y 軸とで囲まれる三角形の面積 S の最小値を求めよ。また，このときの P を点 Q とし，Q における C の接線を l とする。Q の座標および l の方程式を，a, b を用いて表せ。

(3) C 上の点 $\mathrm{R}(a\cos\beta, b\sin\beta) \ (\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi)$ における接線 m が，(2) で求めた l と垂直に交わるものとし，その交点を A とする。このとき，$\tan\beta$ の値および R の座標を，a, b を用いて表せ。

(4) (2) と (3) における Q, R, A について，線分 OQ, OR, OA の長さの平方 $\mathrm{OQ}^2, \mathrm{OR}^2, \mathrm{OA}^2$ をそれぞれ a, b を用いて表し，線分 OQ, OR, OA の長さの大小を比較せよ。

8 自然数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n dx$ とする。ただし，e は自然対数の底であり，無理数である。以下の問いに答えよ。

(1) I_1, I_2 の値を，それぞれ求めよ。また，I_{n+1} を I_n を用いて表せ。

(2) a および b を有理数とする。$a + be = 0$ ならば $a = 0$ かつ $b = 0$ であることを，背理法を用いて証明せよ。

(3) すべての n に対して，$I_n = A_n + B_n e$ (A_n, B_n は有理数) と表すことができる。このことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(4) (3) における A_n に対して，$C_n = \dfrac{A_n}{(-1)^{n+1}\,n!}$ とする。このとき，C_n および A_n を，それぞれ n を用いて表せ。

(5) (3) における B_n は，$B_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i {}_n\mathrm{P}_i$ であることを数学的帰納法を用いて証明し，I_5 の値を求めよ。
ただし，${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (r は $r \leqq n$ の自然数) であり，$0! = 1$ とする。

$\boxed{\mathbf{9}}$* 曲線 $C: y = e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, e^t)$ における接線を l とする。ただし，$0 < t < 1$ である。以下の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。また，l と y 軸との交点を Q とし，l と x 軸との交点を R とする。このとき，2 点 Q, R の座標を，それぞれ求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ および $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を，それぞれ求めよ。

(3) l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を D_1 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_1(t)$ とする。同様に，C と l および y 軸で囲まれた図形を D_2 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_2(t)$ とする。このとき，$V_1(t)$ と $V_2(t)$ を，それぞれ t を用いて表せ。

(4) $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ とするとき，$V(t)$ の最小値，およびそのときの t の値を求めよ。

10* 動点Pは数直線上の座標1あるいは-1にある。表が出る確率p $(0 < p < 1)$，裏が出る確率$1-p$のコインを投げ，その結果によりPに以下のような操作を行う。

操作
● 表が出たとき，Pが1にあれば-1に，-1にあれば1に移動させる。 ● 裏が出たとき，Pは動かさない。

コインをn回投げたときのPの座標をX_nとし，$X_n = 1$となる確率をq_nとする。最初にPは1にあるものとして，以下の問いに答えよ。

(1) q_1, q_2, q_3を，それぞれpを用いて表せ。

(2) q_{n+1}をpとq_nを用いて表せ。

(3) q_nをpとnを用いて表せ。

(4) 確率変数X_nの平均$E(X_n)$，分散$V(X_n)$，標準偏差$\sigma(X_n)$を，それぞれpとnを用いて表せ。