A，B，BR，C，D

平成31年度個別学力検査問題
（国際資源学部，教育文化学部，医学部，理工学部）

数　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は6ページあり，問題は(1)から(9)まで9題あります。解答用紙は4枚あります。計算用紙（白紙）は2枚あります。

　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　受験する学部等により，それぞれ以下の4題が出題されます。

　国際資源学部は(1)，(4)，(5)，(6)

　教育文化学部（理数教育コースを除く）は(1)，(2)，(3)，(4)

　教育文化学部（理数教育コース）は(1)，(4)，(5)，(6)

　医学部は(6)，(7)，(8)，(9)

　理工学部は(1)，(4)，(5)，(6)

をそれぞれ解答しなさい。

4　監督者の指示に従って，解答用紙に受験番号を記入しなさい。

5　1枚の解答用紙に1つの問題を解答しなさい。また，解答用紙の指定された（　）内に解答する問題の番号を記入しなさい。

6　解答用紙の表（おもて）に記入しきれない場合は，その裏に記入してもよい。その場合，解答用紙の表の右下に「裏に記入」と明記しなさい。ただし，解答用紙の裏の上部（破線の上の部分）には解答を記入してはいけません。

7　配付された解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

8　試験終了後，問題冊子および計算用紙は持ち帰りなさい。

（1） 次の問いに答えなさい。

(i) 定積分 $\int_{-2}^{2}|-2x+2|\,dx$ を求めなさい。

(ii) 関数 $f(x)=x^3-2x^2+ax+3$ が $x-3$ で割り切れるとき，定数 a の値を求めなさい。

(iii) 2直線 $y=-2x$, $y=\frac{3}{2}x$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

（2） a は定数とする。2次関数 $f(x)=x^2-4ax+3a^2$ について，次の問いに答えなさい。

(i) $y=f(x)$ のグラフの頂点を求めなさい。

(ii) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積が 8 となるように，a の値を定めなさい。ただし，$a>0$ とする。

(iii) $0\leqq x\leqq 10$ において，関数 $y=f(x)$ の最大値が 100 となるように，a の値を定めなさい。

（3） 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{5}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

で表されるとき，次の問いに答えなさい。

(i) 次の和を求めなさい。

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots\cdots + a_{20}$$

(ii) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めなさい。

(iii) $a_n > 100$を満たす最小の自然数nを求めなさい。

（4） 四面体OABCの辺OAを1：1に内分する点をP，辺OBを2：1に内分する点をQ，辺OCを3：1に内分する点をRとする。△OQRの重心をGとし，直線AGが平面PQRと交わる点をFとする。次の問いに答えなさい。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表しなさい。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{PF}} = k\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + l\overrightarrow{\mathrm{PR}}$（$k$，$l$は実数）と表したとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$と$k$，$l$を用いて表しなさい。

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = r\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$（$r$，$s$，$t$は実数）と表したとき，$r$，$s$，$t$の値を求めなさい。

（5） 関数 $y=\dfrac{6+4\sin\theta+4\cos\theta+\sin 2\theta}{2+\sin\theta+\cos\theta}$ について，次の問いに答えなさい。

(i) $t=2+\sin\theta+\cos\theta$ として，$\sin\theta\cos\theta$ を t の関数で表しなさい。

(ii) (i)の t のとりうる値の範囲を求めなさい。

(iii) y の最小値を求めなさい。

（6） 次の問いに答えなさい。ただし，log は自然対数を表し，e は自然対数の底とする。

(i) m，n は定数とし，$f(x)=\log(\log x)$，$g(x)=m(\log x)^2+n$ とする。曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ が $x=e$ において共有点をもち，かつ $x=e$ において共通の接線をもつように，m，n の値を定めなさい。

(ii) 次の定積分を求めなさい。

① $\displaystyle\int_e^{e^2} x\log x\,dx$

② $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log x}\,dx$

③ $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx$

(7)　1から5までの番号が1つずつ書かれた5枚のカードが箱に入っている。この箱からカードを1枚取り出し，番号を確認してからもとに戻す。この試行を3回続けて行い，取り出したカードの番号を順に a_1，a_2，a_3 とする。次の問いに答えなさい。

(i)　$a_1 < a_2 < a_3$ となる確率を求めなさい。

(ii)　$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) = 0$ となる確率を求めなさい。

(iii)　$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_1 = 0$ となる確率を求めなさい。

(8) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を次のように定義する。

$$a_1 = 1,\ b_1 = \sqrt{3},\qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n - \sqrt{3}\, b_n \\ b_{n+1} = \sqrt{3}\, a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

次の問いに答えなさい。ただし，iは虚数単位とする。

(i) 複素数 $a_1 + b_1 i$ を極形式で表しなさい。

(ii) すべての自然数nに対して，次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$a_n + b_n i = (1 + \sqrt{3}\, i)^n$$

(iii) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めなさい。

(iv) 自然数nに対して，実数x_n，y_nを

$$x_n + y_n i = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)(a_n + b_n i)$$

により定める。$\dfrac{y_n}{x_n}$の最小値を求めなさい。

（9） 自然数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す。たとえば,

$$S(2019) = 2 + 0 + 1 + 9 = 12$$

である。次の問いに答えなさい。

(i) $n + S(n) = 100$ を満たす n を求めなさい。

(ii) $S(n) = 100$ を満たす最小の n を求めなさい。

(iii) $n \leqq 27S(n) + 2019$ を満たす最大の n を求めなさい。