令和2年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，4ページあります。
3. 解答用紙は4枚，草案紙は1枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　n を 0 以上の整数とする．点 $(-n, 0)$ から曲線 $C : y = \log x$ に引いた接線の接点の x 座標を a_n とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　a_0 の値を求めよ．

問 2　直線 $x = a_n$，曲線 C および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

問 3　次の極限を求めよ．ただし，$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ であることは用いてよい．

(1)　$\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} - a_n)$

(2)　$\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n \log a_n}{n}$

問題 2　a, b, r は正の実数で $0<b<a<r<\sqrt{a^2+b^2}$ とし，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を C とおく．点 $\mathrm{P}(p,q)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点で $p>a$, $q \geqq 0$ を満たす．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　点 P から楕円 C に引いた 2 本の接線の傾きをそれぞれ m_1, m_2 $(m_1<m_2)$ とするとき，m_1+m_2 と m_1m_2 を p, q, a, b を用いて表せ．

問 2　問 1 で引いた傾き m_1, m_2 の接線の接点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$ とする．3 点 P, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$ を頂点とする三角形において，$\angle \mathrm{Q_1PQ_2}$ の大きさを θ $(0<\theta<\pi)$ とする．

(1)　$\tan\theta$ を p, q, r, a, b を用いて表し，$\angle \mathrm{Q_1PQ_2}$ が鈍角であることを示せ．

(2)　r が $\sqrt{a^2+b^2}$ より小さい値をとりながら $\sqrt{a^2+b^2}$ に限りなく近づくとき，点 $\mathrm{P}(r,0)$ における θ の極限値を求めよ．

問題 3　座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点 (x, y) を格子点（こうしてん）という．n を正の整数として，次の 3 つの不等式を同時に満たす領域を D_n とする．

$$y \geqq x^2, \qquad y \leqq -x^2 - 2nx + 4n^2, \qquad 1 \leqq x \leqq n$$

領域 D_n に含まれる格子点の総数を a_n とするとき，次の各問いに答えよ．

問 1　a_2 を求めよ．

問 2　$n \geqq 3$ のとき，a_n を求めよ．

問 3　$n \geqq 3$ のとき，領域 D_n の境界線上の格子点の総数を b_n とする．

(1)　領域 D_n の面積 S_n を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{S_n - \left(a_n - \frac{1}{2}b_n - 1\right)}{n}$ を求めよ．

問題 4　p は $2^p=3$ を満たす実数とする．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　p は無理数であり，$\dfrac{3}{2}<p<\dfrac{8}{5}$ であることを示せ．

問 2　次の 2 式を満たす x，y を p を用いて表せ．

$$2^{x+y-2}=9^{y-1},\qquad 2^{2x-1}=3^{3x-y+1}$$

問 3　a，b を有理数とする．次の 2 式を満たす有理数 x，y が存在するように a，b を求めよ．

$$2^{x+y-2}=9^{y-a},\qquad 2^{2x-b}=3^{3x-y+1}$$