

2020 年度

# 数 学 問 題

(理学部・工学部・医学部医学科)

## 注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で8ページである。脱落のあった場合には申し出ること。なお、解答用紙は上部で接着してあるので、はがさずに解答すること。
- 3 解答用紙は全部で4枚である。各ページ所定欄に、それぞれ氏名、受験学部、受験番号（最後のページは、左右2か所）を忘れずに記入すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが、採点はしない。
- 6 机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと。
- 7 問題冊子は持ち帰ること。

第 1 問 (50 点)

$\alpha$  は  $0 < \alpha < \pi$  を満たす実数とする.  $xy$  平面において,  $y = \sin x$  のグラフと  $y = \sin(x - \alpha)$  のグラフの交点のうち,  $x$  座標が正で最小のものを  $P$  とおく. 次の問いに答えよ.

問 1  $P$  の座標を  $\alpha$  を用いて表せ.

問 2  $P$  の  $x$  座標を  $c$  とする. 曲線  $y = \sin x$  ( $\alpha \leq x \leq c$ ), 曲線  $y = \sin(x - \alpha)$  ( $\alpha \leq x \leq c$ ) と直線  $x = \alpha$  とで囲まれた図形を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積  $V(\alpha)$  を求めよ.

問 3  $\alpha$  が  $0 < \alpha < \pi$  の範囲を動くときの  $V(\alpha)$  の最大値を求めよ.

第 2 問 (50 点)

$p, q$  を実数とする. 3 次方程式  $x^3 - 3x^2 + px + q = 0$  は 1 個の実数解  $b$  と 2 個の虚数解をもつとする. このとき, 次の問いに答えよ.

問 1 虚数解の 1 つを  $\alpha$  とするとき,  $\alpha$  と共役な複素数  $\bar{\alpha}$  がもう 1 つの虚数解であることを示せ.

問 2  $\alpha$  の実部を  $r$  とする.  $|\alpha - \bar{\alpha}| = |\alpha - b| = 2\sqrt{3}$  のとき,  $|r - b|$  を求めよ.

問 3 問 2 の仮定の下で, 可能な実数の組  $(p, q)$  をすべて求めよ.

第 3 問 (50 点)

次の問いに答えよ.

問 1  $1 < m \leq n$  を満たす自然数  $m, n$  に対し, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1}$$

問 2  $\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$  の整数部分を求めよ. ただし, 実数  $x$  に対して  $a$  が  $x$  の整数部分であると  
は,  $a$  が整数であって  $a \leq x < a+1$  が成り立つことをいう. また, 正の実数  $x$  の自  
然対数を  $\log x$  とし,  $\log 2 = 0.69$ ,  $\log 3 = 1.10$ ,  $\log 2020 = 7.61$  とする.

第 4 問 (50 点)

座標空間内に 3 点  $A(\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$ ,  $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$  をとる.  $\triangle ABC$  の重心を通り  $xy$  平面に垂直な直線を  $\ell$  とする. また, 点  $P(p, q, r)$  は

$$r > 0, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 4$$

を満たしているものとする. 次の問いに答えよ.

問 1  $p$  および  $r$  を  $q$  を用いて表せ. また,  $q$  がとり得る値の範囲を求めよ.

問 2 線分  $BP$  の中点を  $M$  とする. また,  $\ell$  上に点  $N$  を  $\overrightarrow{BP}$  と  $\overrightarrow{MN}$  が垂直になるようにとる.  $N$  の座標を  $q$  を用いて表せ.

問 3  $N$  の  $z$  座標が最小になるときの  $q$  の値を求めよ.