

数学問題紙

令和2年2月25日

自 11:00

至 12:40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は1から5までの5ページである。
2. 解答用紙は③から⑥までの4枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 折りこまれている白紙(4枚)は草案紙として使用すること。
5. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1

次の各問に答えよ.

- (1) 629 と 481 の最大公約数を d とする. x と y に関する方程式

$$629x + 481y = d$$

を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ.

- (2) 次の条件により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (3) 5 人が A, B, C, D, E の 5 部屋に入るとき, 「1 人だけの部屋が存在しない」確率を求めよ.

2 n を自然数とする. 関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos t + \sin 2nt)^2 dt$ で定義する. また, 各 n に対して $f_n(x)$ の最小値を a_n とする.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 nt dt$ および $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2nt dt$ を求めよ.

(2) a_n を n を用いて表せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

3 a と b は $0 < a < b$ をみたす定数とする. 座標平面上の点 $A(0, -a)$ と直線 $l: y = a$ に対して, 点 A からの距離と直線 l からの距離の和が $2b$ である点の軌跡を C とする.

(1) 軌跡 C 上の点 $P(x, y)$ について, $y \geq a$ のとき, y を定数 a, b を含む x の式で表せ.

(2) 軌跡 C の概形を図示せよ.

(3) 軌跡 C で囲まれる部分を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を a と b を用いて表せ.

4

複素平面上において原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. 円 C の外部の点 $P(w)$ を通る円 C の 2 本の接線の接点をそれぞれ $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とする. 直線 OP と直線 AB の交点を Q とし, Q の実軸に関して対称な点を $R(z)$ とする.

(1) z を w を用いて表せ.

(2) $z = \frac{1}{2}$, $z = \frac{i}{2}$ のときの w の値をそれぞれ γ , δ とする. 点 $R(z)$ が点 $\frac{1}{2}$ と点 $\frac{i}{2}$ を結ぶ直線上にあるとき, 点 $P(w)$ は原点 O , 点 γ , 点 δ の 3 点を通る円上にあることを示せ.

(3) 次の①と②をつなげた曲線を考える.

① 点 $\frac{1}{2}$ と点 $\frac{i}{2}$ を結ぶ線分

② 円 $|z| = \frac{1}{2}$ 上で, 点 $\frac{i}{2}$ と点 $\frac{1}{2}$ を端点とし, 中心角が $\frac{3\pi}{2}$ の弧

点 $R(z)$ がこの曲線上を点 $\frac{1}{2}$ から出発し, ①を通過して点 $\frac{i}{2}$ へ, 次に②を通過して点 $\frac{1}{2}$ に戻ってくるときの点 $P(w)$ の軌跡を図示せよ.