

令和3年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、4ページあります。
3. 解答用紙は4枚、草案紙は1枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入下さい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出下さい。問題紙、草案紙は持ち帰り下さい。

問題 1 $a > 0$ とし, $f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおく. このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1 曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = -1$ に接するように定数 a の値を求めよ. また, このとき, $-1 < f(1) < 0$ であることを示せ.

問 2 4点 $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ を頂点とする正方形の周を K とする. 曲線 $y = f(x)$ と K との共有点の個数が, ちょうど 6 個となる定数 a の値の範囲を求めよ.

問 3 曲線 $y = f(x)$ の区間 $-1 \leq x \leq 1$ における最大値を m とする. a がすべての正の値をとって変化するとき, a の値を横軸に m の値を縦軸にとって m のグラフの概形をかけ. また, m の最小値とそのときの a の値を求めよ.

問題 2 投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨がある. この硬貨を同時に 2 枚投げて, 表が出た枚数に応じて数直線上の点 P を正の方向へ動かす. 2 枚とも表が出たら 2 だけ移動し, 1 枚だけ表が出たら 1 だけ移動するものとし, 2 枚とも裏が出たら移動しないものとする. 点 P の出発点を原点として, この試行を n 回くり返したとき, 点 P の座標を 3 で割った余りが 0 である確率を a_n , 1 である確率を b_n , 2 である確率を c_n とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ をそれぞれ求めよ.

問 2 $n \geq 1$ のとき, $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ をそれぞれ a_n, b_n, c_n を用いて表せ.

問 3 漸化式 $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を x_1 を用いて表せ.

問 4 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

問題 3 $p=0, 1, 2, \dots$ とし, $f(x)=x^p\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) とおく. このとき, 次の各問いに答えよ. $p=0$ のとき, $f(x)=\sqrt{x}$ とする.

問 1 $0 \leq x < x'$ のとき, $f(x) < f(x')$ であることを示せ.

問 2 曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a$, 直線 $x=b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ. ただし, $0 \leq a < b$ とする.

問 3 次の不等式を証明せよ. ただし, n は正の整数とする.

$$\frac{2}{2p+3}n^{p+1}\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n k^p \sqrt{k} < \frac{2}{2p+3}(n+1)^{p+1}\sqrt{n+1}$$

問題 4 O を原点とする座標空間に、3点 $A(1, -2, 2)$, $B(-1, -3, 1)$, $C(-1, 0, 4)$ がある。このとき、次の各問いに答えよ。

問 1 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

問 2 3点 A , B , C を含む平面に O から垂線 OH を下ろす。このとき、点 H の座標を求めよ。

問 3 $\triangle ABC$ の外接円を K とする。

(1) K の中心 J の座標を求めよ。

(2) 点 P が K 上を動くとき、 OP^2 の最大値を求めよ。