2021 年度

数　学　問　題

（理学部・工学部・医学部医学科）

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で８ページである．脱落のあった場合には申し出ること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさずに解答すること．

3　解答用紙は全部で４枚である．各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右２か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

6　机上に各自の「受験票」と「大学入学共通テスト受験票」を出しておくこと．

7　問題冊子は持ち帰ること．

第 1 問 （50 点）

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上の連続関数 $f(x)$ と自然数 n に対し

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

とおく．また

$$D = \lim_{n \to \infty} n\left(I_n - \int_0^1 f(x)\,dx\right)$$

とおく．次の問いに答えよ．

問 1　$f(x) = x^2$ のとき D の値を求めよ．

問 2　$f(x) = x^3$ のとき D の値を求めよ．

問 3　$f(x) = e^x$ のとき D の値を求めよ．

ただし，$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + a_n$ とおくとき，$\lim_{n \to \infty} n^2 a_n = \frac{1}{2}$ となることを用いてよい．

第 2 問 (50 点)

n を 3 以上の自然数とする．単位円に内接する正 n 角形の面積を A_n，この正 n 角形の各辺の中点を順に結んでできる正 n 角形の面積を B_n で表すとき，次の問いに答えよ．

問 1　A_n を n を用いて表せ．

問 2　B_n を n を用いて表せ．

問 3　極限値 $\lim_{n \to \infty} B_n$ を求めよ．

問 4　$n \geqq 32$ のとき，不等式 $\dfrac{B_n}{A_n} > \dfrac{99}{100}$ が成り立つことを示せ．

第 3 問 （50 点）

xyz 空間の中で，方程式 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)$ で表される図形は，放物線を y 軸のまわりに回転して得られる曲面である．これを S とする．また，方程式 $y=x+\dfrac{1}{2}$ で表される図形は，xz 平面と 45 度の角度で交わる平面である．これを H とする．さらに，S と H が囲む部分を K とおくと，K は不等式

$$\frac{1}{2}(x^2+z^2) \leqq y \leqq x+\frac{1}{2}$$

をみたす点 (x,y,z) の全体となる．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　K を平面 $z=t$ で切ったときの切り口が空集合ではないような実数 t の範囲を求めよ．

問 2　問 1 の切り口の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

問 3　K の体積を求めよ．

第 4 問 （50 点）

n 個の球の入った箱から球を一つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返す．ただし $k \leqq n$ とする．各回について，どの球が取り出されるかは同様に確からしいとする．取り出した k 個の球がすべて相異なる確率を $P(n,k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

問 1　$P(n,k)$ を n と k を用いて表せ．

問 2　極限値 $\lim_{n\to\infty} (P(n,k))^n$ を $Q(k)$ とおくとき，$Q(k)$ を k を用いて表せ．ただし公式 $\lim_{x\to+0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ を用いてもよい．

問 3　無限級数

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log Q(k)}$$

の値を求めよ．ただし log は自然対数を表す．