C－1

令和2年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は11頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ A さんは 1 が書かれたカードを 1 枚，2 が書かれたカードを 2 枚，4 が書かれたカードを 1 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。B さんは 2 が書かれたカードを 2 枚，3 が書かれたカードを 2 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

(1) X が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2) $X < Y$ となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ kを定数とし，$f(x)=x^3-kx$とおく。曲線$C: y=f(x)$上に原点と異なる点$\mathrm{P}(a,\ f(a))$をとる。点Pを通り曲線Cとちょうど2点を共有する2つの直線のうち，傾きが大きい方をℓ_1，小さい方をℓ_2とする。さらに，Cとℓ_1の共有点のうちPと異なるものを$\mathrm{Q_1}$，Cとℓ_2の共有点のうちPと異なるものを$\mathrm{Q_2}$とする。ℓ_1およびℓ_2の方程式と，$\mathrm{Q_1}$および$\mathrm{Q_2}$の座標を求めよ。

3 座標平面上に4点$P_0(2, 0)$，$P_1(0, 2)$，$Q_0(0, 0)$，$Q_1(-1, 1)$がある。正の整数nに対し，点P_n，Q_nまで定まったとき，点P_{n+1}，Q_{n+1}を以下の条件で定める。

> 四角形$P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$と四角形$P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$は相似であり，かつ辺P_nQ_nのみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_2，Q_2の座標を求めよ。

(2) P_4，P_8の座標を求めよ。

(3) 正の整数mに対して，P_{8m}の座標をmの式で表せ。

$\boxed{4}$ tを実数とし，不等式

$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0, \quad t \leqq x \leqq t+1$$

の表す xy 平面上の領域を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。

t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$ 四面体 ABCD において，$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$，$\angle ADB = 90^\circ$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle BDC$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{AB^2 + CD^2}}{DG}$ の値を求めよ。

6 袋の中に1から5までの整数が書かれたカードが1枚ずつ入っている。その中から1枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が3の倍数になる確率を p_n とする。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が3の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が3の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。

$\boxed{7}$ a は 0 でない定数とする。2つの放物線 $y = x^2$ と $x = \dfrac{1}{2a}y^2 + \dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど3本となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ 複素数平面上で複素数 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1, B_0, B_1 とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする。点 A_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ が表す複素数を z_n とする。

(1) 複素数 z_3 を求めよ。

(2) 複素数 z_6 を求めよ。

(3) 正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

$\boxed{9}$ 正の整数 n に対して，

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k^2$$

とする。

(1) a_n を求めよ。

(2) b_n を求めよ。

(3) c_n を求めよ。

(4) d_n を求めよ。

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n}$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{10}}$ 有理数 a，b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a，b は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。

11 定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2 \, dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して，不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 正の整数 n に対して，不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数 a $(0 \leqq a \leqq 1)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(a)$ を求めよ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学 部 ・ 学 科 等		解答する問題番号
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	国際教養学部 文学部 法政経学部 教育学部 園芸学部 先進科学プログラム	 人文学科（行動科学コース） 小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース 食料資源経済学科 化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B	教育学部	中学校コース （数学科教育分野）	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$
	理学部 工学部 園芸学部 薬学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科 園芸学科，応用生命化学科， 緑地環境学科 物理学関連分野 工学関連分野	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
	理学部	数学・情報数理学科	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{10}$
	医学部		$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$