C — 1

令和3年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は9頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰りなさい。

1 定数 a は $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形ABCDは以下の4つの条件を満たす。

- 2点A，Bは放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある。
- 2点C，Dは放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある。
- 2点A，Dの x 座標は等しく，かつ正である。
- 点Aの y 座標は点Dの y 座標より大きい。

点Aの x 座標を t とする。長方形ABCDの周および内部を，原点を中心に1回転させてできる図形の面積を S とする。

(1) S を t の式で表せ。

(2) S の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

2 平面上に半径がそれぞれ a^2，b^2，c^2 $(0 < a < b < c)$ の3つの円 A，B，C および直線 ℓ がある。3つの円はどれも直線 ℓ に接していて，どの2つの円も外接しているとする。

(1) c を a と b を用いて表せ。

(2) 数列 a，b，c が等比数列となるとき，その公比を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 袋に白球と黒球が5個ずつ入っている。以下のゲームをn回続けて行う。

> 袋から1個の球を取り出す。それが白球ならば1点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が3の倍数ならば1点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1) $n=2$の場合，総得点が2点となる確率を求めよ。

(2) $n=3$の場合，総得点が2点以上となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ m を正の整数とする。座標平面上の点 $(x,\ y)$ で

$$xn^3 + yn^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

がすべて整数であるようなものは，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x + y \leqq m$$

の表す領域に何個あるか答えよ。

$\boxed{5}$ 袋に白球と黒球が5個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

> 袋から1個の球を取り出す。それが白球ならば1点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が3の倍数ならば1点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1) $n=2$ の場合，総得点が2点となる確率を求めよ。

(2) $n=4$ の場合，総得点が2点以上となる確率を求めよ。

(3) $n=10$ の場合，総得点が8点以上となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標平面上に曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ および3点 A$(-1, -1)$，B$(-1,\ 0)$，D$(1,\ 0)$ がある。曲線 C 上の点 P$\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ に対して，直線 AP と直線 $y = -2$ の交点を Q とする。ただし，P が A と等しいとき，直線 AP とは A における C の接線のこととする。また，直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする。

(1) 点 P が曲線 C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ。

(2) 直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ。

$\boxed{7}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $w = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とする。ただし，i は虚数単位である。
z を 0 でない複素数とするとき，次の等式を証明せよ。

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)$$
$$= z^5-\frac{1}{z^5}$$

(2) ある定数 C に対して，等式

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=C\sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ。また，C の値を求めよ。

(3) $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ 2曲線 $C_1 : y = e^{ax}$，$C_2 : y = a\log x + b$ は，x 座標が t $(0 < t < 1)$ の点で接していて，$a \neq 0$ であるとする。ただし，2曲線が点Pで接するとは，Pを共有し，Pにおける接線が一致することである。

(1) a および b を t の式で表せ。

(2) 曲線 C_1 と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{t \to 1-0} S_1(t)$ を求めよ。

(3) 曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{t \to 1-0} S_2(t)$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 多項式 $f_n(x)$, $g_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を条件

$$f_1(x) = x, \quad g_1(x) = 1,$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + xg_n(x), \quad g_{n+1}(x) = g_n(x) - xf_n(x)$$

で定める。

(1) 正の整数 n に対して，等式

$$\{f_{n+1}(x)\}' = (n+1)g_n(x), \quad \{g_{n+1}(x)\}' = -(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し，多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ。

(2) 正の整数 n に対して，区間 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta = f_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \quad \cos n\theta = g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

が成り立つことを示せ。

(3) 正の整数 n と実数 a に対して，方程式 $f_n(x) = ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部	学科等	解答する問題番号
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	国際教養学部 文学部 法政経学部 教育学部 園芸学部 先進科学プログラム	 人文学科（行動科学コース） 小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース 食料資源経済学科 化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B	教育学部	中学校コース （数学科教育分野）	$\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
	理学部 工学部 園芸学部 薬学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科 園芸学科，応用生命化学科 緑地環境学科 物理学関連分野 工学関連分野	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
	理学部	数学・情報数理学科	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$
	医学部		$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$