

令和4年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄に受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は9頁です。落丁、乱丁または印刷不備があったら申し出る
こと。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰りなさい。

1 円周を 12 等分するように点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ が時計回りに並んでいる。また、白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある。点 P を、次の操作によって 12 個の点上を移動させる。

操作：袋から球を一つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに、黒球ならば反時計回りに、サイコロの目の数だけ P を移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

P を最初に点 A_1 に置く。操作を 1 回行い、 P が A_1 から移動した点を Q とおく。続けて操作を 1 回行い、 P が Q から移動した点を R とおく。もう一度操作を行い、 P が R から移動した点を S とおく。

(1) $R = A_1$ となる確率を求めよ。

(2) 3 点 Q, R, S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。

2 座標平面において、原点 O と点 $A(1, 0)$ と点 $B(0, 1)$ がある。 $0 < t < 1$ に対し、線分 BO , OA , AB のそれぞれを $t : (1 - t)$ に内分する点を P , Q , R とする。

(1) $\triangle PQR$ の面積を t の式で表せ。

(2) $\triangle PQR$ が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ。

(3) $\theta = \angle RPQ$ とする。(2) のそれぞれの場合に $\cos \theta$ を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $y = ax$ のグラフと $y = x|x - 2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。
- (2) $0 \leq a \leq 2$ とする。 $S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x - 2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

4 0以上9999以下の整数を4桁で表示し、以下の操作を行うこととする。ただし、4桁で表示するとは、整数が100以上999以下の場合は千の位の数字を0、10以上99以下の場合は千の位と百の位の数字を0、1以上9以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を0、そして0はどの位の数字も0とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ換える。さらに、百の位の数字と一の位の数字を入れ換える。

また、整数 L に対し、操作によって得られた整数を \bar{L} と表す。

(1) M を0以上9999以下の整数とし、 $M = 100x + y$ のように整数 x, y ($0 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$) を用いて表す。操作によって得られた \bar{M} が M の $\frac{2}{3}$ 倍に3を足した数に等しいならば、 $-197x + 298y = 9$ が成り立つことを証明せよ。

(2) N が0以上9999以下の整数ならば、操作によって得られた整数 \bar{N} は N の $\frac{2}{3}$ 倍に1を足した数と等しくならぬことを証明せよ。

5 n を自然数とする。 n 個のサイコロを同時に投げ、出た目の積を M とおく。

- (1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。
- (2) M が 2 で割り切れるが、3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。
- (3) M が 4 では割り切れるが、3 では割り切れない確率を求めよ。

6 座標空間において、原点 O と点 $A(1, 0, -1)$ と点 $B(0, 5, 0)$ がある。
実数 t を用いて $t\vec{OA} + \vec{OB}$ と表される点全体を ℓ とする。また、 xy 平面上の $y = x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

- (1) 曲線 C 上の点 $P(a, a^2, 0)$ を固定する。 ℓ 上の点 Q を、 \vec{OA} と \vec{PQ} が垂直であるようにとる。このとき、点 Q の座標を a を用いて表せ。
- (2) 曲線 C 上の点 R と ℓ 上の点 S のうち、 $|\vec{RS}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また、そのときの $|\vec{RS}|$ の値を求めよ。

7 x, y についての方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \quad \dots\dots (*)$$

に関する次の問いに答えよ。

(1) x, y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち, y が最小であるものを求めよ。

(2) 数列 a_1, a_2, a_3, \dots が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。このとき, $(x, y) = (a_{n+1}, a_n)$ が $(*)$ を満たすならば, $(x, y) = (a_{n+2}, a_{n+1})$ も $(*)$ を満たすことを示せ。

(3) $(*)$ の整数解 (x, y) は無数に存在することを示せ。

8 正の整数 m, n に対して,

$$A(m, n) = (m + 1)n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x} dx$$

とおく。

- (1) $e^{-\frac{1}{n}} \leq A(m, n) \leq 1$ を証明せよ。
- (2) 各 m に対して, $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} A(m, n)$ を求めよ。
- (3) 各 n に対して, $c_n = \lim_{m \rightarrow \infty} A(m, n)$ を求めよ。

9 r を正の実数とし、関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

を考える。

(1) $r = 1$ のとき、 $f(x)$ はつねに増加することを示せ。

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ。

条件： $0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号	
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	国際教養学部 文学部 法政経学部 教育学部 園芸学部 先進科学プログラム	人文学科（行動科学コース） 小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース 食料資源経済学科 化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 1 2 3 </div>
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B	教育学部	中学校コース （数学科教育分野）	<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 3 4 5 6 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%; margin-top: 5px;"> 7 8 </div>
	理学部 工学部 園芸学部 薬学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科 園芸学科，応用生命化学科 緑地環境学科 物理学関連分野 工学関連分野	<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 4 5 6 7 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%; margin-top: 5px;"> 8 </div>
	理学部	数学・情報数理学科	<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 4 5 6 7 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%; margin-top: 5px;"> 8 9 </div>
	医学部		<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 5 6 7 8 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%; margin-top: 5px;"> 9 </div>