数 学 問 題 紙

令和 3 年 2 月 25 日

自　　11：20

至　　13：00

答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 折りこまれている白紙（4 枚）は草案紙として使用すること。
5. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

◇M2(226—10)

1 次の各問に答えよ．

(1) 三角形 ABC において

$$\sin C = 2\cos A \sin B$$

であるとき，三角形 ABC はどのような形をしているか．

(2) 自然数 n に対して

$$N = (n+2)^3 - n(n+1)(n+2)$$

が 36 の倍数になるような n をすべて求めよ．

(3) 体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ の直円錐において，直円錐の側面積の最小値を求めよ．ただし直円錐とは，底面の円の中心と頂点とを結ぶ直線が，底面に垂直である円錐のことである．

$\boxed{2}$ kは実数で$0 < k < \dfrac{1}{2}$とする．面積がSである三角形ABCの三辺BC, CA, AB上にそれぞれ点L，M，Nを

$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AB}} = k$$

となるようにとる．次に，ALとBMの交点をP，BMとCNの交点をQ，ALとCNの交点をRとする．このとき，三角形PQRの面積をTとする．

(1) 三角形ABPの面積をUとするとき，$\dfrac{U}{S}$をkで表せ.

(2) $T > \dfrac{1}{2}S$となるためのkに関する条件を求めよ.

3 k, m, nは自然数とする.

ある箱に, 白い球がm個, 赤い球がn個入っている. この箱から無作為に球を1個取り出して, 球の色を確認してから元の箱に戻す試行を繰り返す. 白い球が合計k回箱に戻された時点で終了する. このときの試行の回数がx回$(x \geqq k)$である確率を$p_k(x)$とする.

(1) $p_k(k)$と$p_k(k+1)$をk, m, nを用いて表せ.

(2) $\dfrac{p_k(x+1)}{p_k(x)}$をk, m, n, xを用いて表せ.

(3) $m=3$, $n=7$であるとき, $p_2(x)$の最大値を求めよ.

4 $a>0$ に対して $f(x)=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ とし，直線 ℓ，直線 $x=0$，曲線 $y=f(x)$ で囲まれる領域を D とする．

(1) 直線 ℓ の y 切片を a を用いて表せ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ は，点 P 以外に共有点を持たないことを示せ．

(3) 領域 D の面積を a を用いて表せ．

(4) 領域 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を a を用いて表せ．